

به نام آن که جان را فکرت آموخت
۱۴۰۰-۱۴۰۱

همنده^۲

مبحث: ماتریس ، دترمینان
دستگاه های معادلات خطی

تنظیم: ترکمن

ماتریس (Matrix)

Ex یک جدول مستطیل شکل از اعداد حقیقی است که اگر دارای m سطر و n ستون باشد آن را از مرتبه m در n (یا $m \times n$) می‌گویم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

درایی سطر نام و ستون نام: a_{ij}

(هر عضو ماتریس را یک "درایی" می‌نامیم)

مثال:
Ex

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 4 \\ 6 & \sqrt{3} & \frac{5}{\omega} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \pi & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

نمایش پسته (شکل فشرده)

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

که a_{ij} نماینده تمام درایه های ماتریس A می باشد و
 $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$

مثال Ex اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = i + j^2$ ، آن گاه A را به صورت گسترده نمایش دهید

$$\left. \begin{array}{l} \text{سطر اول } i=1 \rightarrow \begin{array}{l} j=1 \rightarrow a_{11} = 1 + 1^2 = 2 \\ j=2 \rightarrow a_{12} = 1 + 2^2 = 5 \\ j=3 \rightarrow a_{13} = 1 + 3^2 = 10 \end{array} \\ \text{سطر دوم } i=2 \rightarrow \begin{array}{l} j=1 \rightarrow a_{21} = 2 + 1^2 = 3 \\ j=2 \rightarrow a_{22} = 2 + 2^2 = 6 \\ j=3 \rightarrow a_{23} = 2 + 3^2 = 11 \end{array} \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

مثال Ex اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i > j \\ \vee & ; i = j \\ i^2 & ; i < j \end{cases}$ ، آن گاه A را به صورت جدول نمایش دهید

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

مثال Ex اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس A را به شکل فشرده نمایش دهید.

تساوی دو ماتریس (هم‌مرتبه)

Ex دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی اند اگر و تنها اگر

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A = B \iff \forall i, j \quad a_{ij} = b_{ij}$$

نت EX اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 17(1) & 14(2) \\ 15(3) & 14(4) \end{matrix}$$

نت EX اگر $\begin{bmatrix} x^2+3 & 4 \\ 3x+y & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & -x^2+5x \\ 2x+2y & -y \end{bmatrix}$ ، نگاه حاصل $x+y$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 3(1) & 2(2) \\ -2(4) & -2(3) \end{matrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس ← عدد در یک تک درایه ضرب می‌شود.

Ex

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \xrightarrow{\forall r \in \mathbb{R}} rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

یک ماتریس
هم‌مرتبه با A

* درخت خاص که $r = -1$ ، ماتریس $-A$ به دست می‌آید و آن را قرینه ماتریس A می‌نامیم.
(تمام درایه‌های ماتریس $-A$ ، نظیر به نظیر قرینه درایه‌های ماتریس A می‌باشند.)

جمع و تفریق دو ماتریس (هم مرتبه) سه درایه ها دو ماتریس نظیر به نظیر جمع یا تفریق می شوند
Ex

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ ، حاصل $3A - 2B$ ، بیابید.
Ex

تمرین اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس 3×2 مانند C بیابید که
H.W
 $A + B - C = \bar{O}$

(تذکره: ماتریسی که تمام درایه هایش صفری باشند، ماتریس صفری نامند و با نماد $\bar{O}$ نشان می دهند)
Ex

مثال دو ماتریس 3×3 غیر صفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر شود.
Ex