

نوروز ۱۴۰۱

همایش ریاضی



استاد اشرفی

WWW.Mathtest.ir

انواع تجزیه:

(۱) **فاکتورگیری:** یکی از ساده ترین روش های تجزیه فاکتورگیری است. به طوری که یک عامل مشترک را از همه جمله ها کنار می گذاریم.

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 =$$

برای نمونه در عبارت زیر : 

x^2 عاملی است که در همه جمله ها مشترک است و می توانیم x^2 را از همه آن ها فاکتور بگیریم.

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 = x^2(3x^2 + 2x + 5)$$

(۲) **تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:** هرگاه تفاضل دو مربع را ببینیم می توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، مانند:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

$$16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x - 5)(4x + 5)$$

$$(x + 3)^2 - y^2 = ((x + 3) - y)((x + 3) + y)$$

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

اتحاد جمله مشترک به صورت $x^2 + (a + b)x + ab$ است که به عوامل $(x + a)(x + b)$ تجزیه می شوند.

به نمونه زیر توجه کنید: 

برای تجزیه عبارت $x^2 + 3x + 2$ باید دو عدد پیدا کنیم که جمع آنها ۳ و ضرب آنها ۲ باشد. این دو عدد ۱ و ۲ هستند.

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

تجزیه عبارت به شکل زیر است.

تعریف دوم مشتق:

در تعریف $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ اگر به جای x از تغییر متغیر $x = a + h$ استفاده کنیم که با توجه به میل کردن x به a همواره h به صفر میل می کند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

در سوال های تشریحی اهمیتی ندارد که برای اثبات مشتق از تعریف اول یا دوم استفاده کنیم.



مثال:

مقدار مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در $x = 2$ بیابید.

مشتق این تابع را به کمک تعریف دوم محاسبه می کنیم.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$$

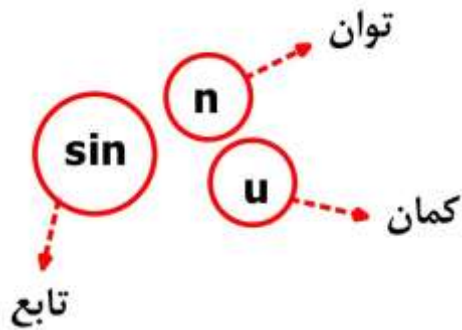
با استفاده از اتحاد مکعب $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ داریم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(8 + 3(2)^2h + 3(2)h^2 + h^3) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(12 + 6h + h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} 12 + 6h + h^2 = 12 + 6(0) + (0)^2 = 12$$

مشتق توابع مثلثاتی درجه دار:

برای مشتق گیری از این تابع ها اول به نام گذاری زیر توجه کنید. فرض کنید می خواهیم از $\sin^n u$ مشتق بگیریم.



حالا که با نام گذاری آشنا شدیم، قاعده «تکت» را معرفی می کنیم. تکت از حرف های اول **توان** + **کمان** + **تابع** + **مشتق** تشکیل شده است. در واقع در هر مشتق گیری مثلثاتی ما توان را در مشتق کمان در تابع با یک توان کم تر و در مشتق تابع ضرب می کنیم. به زبان نمادین داریم:

$$\sin^n u \Rightarrow n \cdot u' \cdot \sin^{n-1} u \cdot \cos u$$

$$\cos^n u \Rightarrow n \cdot u' \cdot \cos^{n-1} u \cdot (-\sin u)$$

$$\tan^n u \Rightarrow n \cdot u' \cdot \tan^{n-1} u \cdot (1 + \tan^2 u)$$

$$\cot^n u \Rightarrow n \cdot u' \cdot \cot^{n-1} u \cdot (-1 - \cot^2 u)$$

برای نمونه:



$$۱) \sin^3 x \Rightarrow 3 \times 1 \times \sin^2 x \times \cos x$$

$$۲) \cos^4 \sqrt{x} \Rightarrow 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos^3 \sqrt{x} \times -\sin \sqrt{x}$$

-مثال: سکه ای را دو بار پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو پشت ظاهر می شود؟

اگر پشت را با «پ» و رو را «ر» نمایش دهیم. فضای نمونه ای این پدیده تصادفی که

$S = \{(ر، ر)، (ر، پ)، (پ، ر)، (پ، پ)\}$ که مجموعه ای چهار عضوی است و پیشامد هر دو پشت بودن

$A = \{(پ، پ)\}$ که مجموعه ای تک عضوی است. احتمال وقوع این پیشامد عبارتست از:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

-مثال: خانواده ای دو فرزند دارد. با کدام احتمال بچه های این دو خانواده هم جنس نیستند.

اگر دختر را با «د» و پسر را با «پ» نمایش دهیم. فضای نمونه ای این پدیده تصادفی

$S = \{(د، د)، (د، پ)، (پ، د)، (پ، پ)\}$ که مجموعه ای چهار عضوی است و پیشامد غیر همجنس بودن

فرزندان $A = \{(د، پ)، (پ، د)\}$ که مجموعه ای دو عضوی است.

احتمال وقوع این پیشامد عبارتست از:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

-مثال: در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره قرمز داریم. دو مهره به تصادف از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال هر دو سفید هستند.

تعداد اعضای فضای نمونه ای یعنی برداشتن ۲ مهره از کل ۹ مهره برابر است با:

$$n(s) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

تعداد اعضای پیشامد تصادفی یعنی برداشتن ۲ مهره از ۵ مهره سفید برابر است با:

$$n(A) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$