



عکاس: سید محمدی حسینی

▲ پل سفید - اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانه کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

درس اول

ترکیب توابع

درس دوم

تابع وارون

درس سوم

درس اول

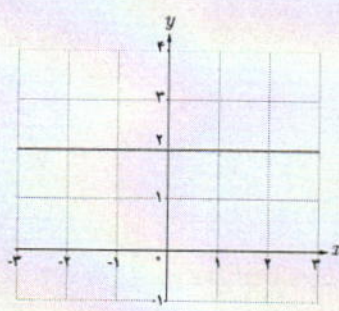
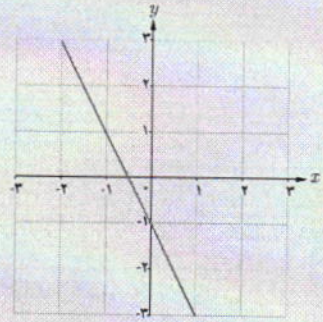
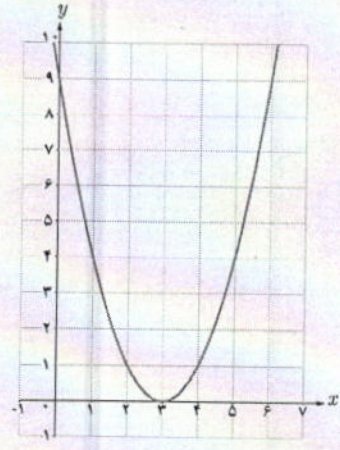
توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند. هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه توابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است. مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به ترتیب از درجه ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{4}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{2}x^2$$

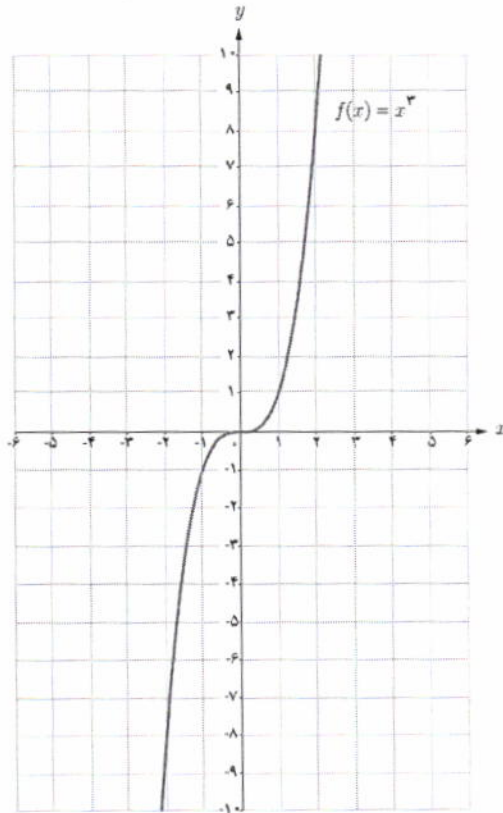
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به صورت زیر است:

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه دوم
ضابطه کلی	$f(x) = b$	$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
مثال	$f(x) = 2$	$f(x) = -2x - 1$	$f(x) = x^2 - 6x + 9$
			

تابع درجه ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع \mathbb{R} است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸



خواندنی

الگوی کلی لانه زنبور عسل به صورت یک شش ضلعی است که در دور اول با شش تا شش ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r) = 3r^2 - 3r + 1$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r = 1, 2, 3$ به دست آورید؟

$$f(1) = 3(1)^2 - 3(1) + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$f(2) = 3(2)^2 - 3(2) + 1 = 12 - 6 + 1 = 7$$

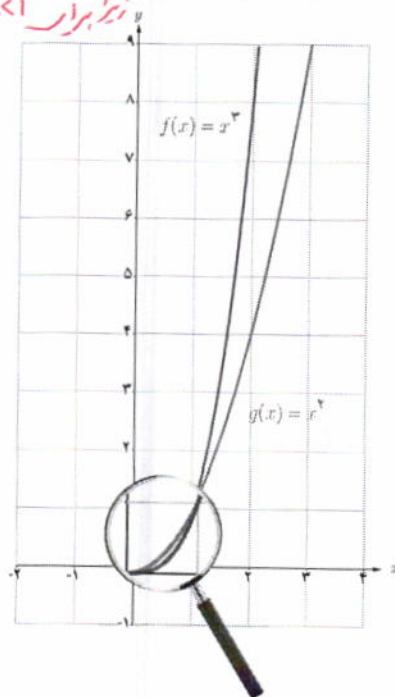
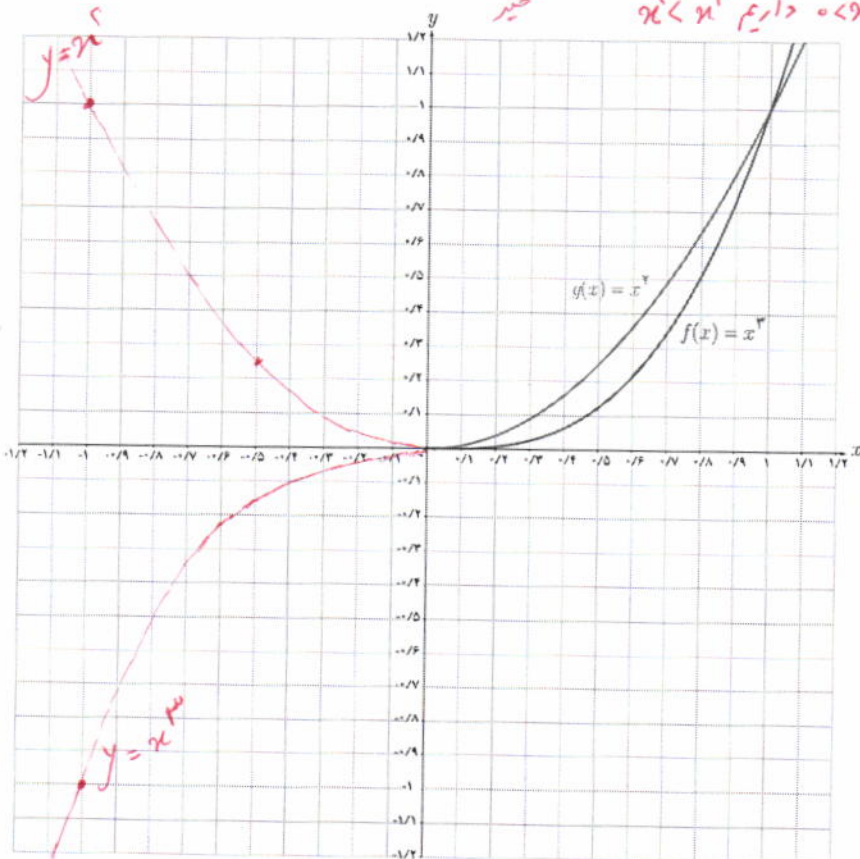
$$f(3) = 3(3)^2 - 3(3) + 1 = 27 - 9 + 1 = 19$$



فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ که برای اعداد نامنفی رسم شده اند :

الف) آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x) = x^2$ بالای نمودار $g(x) = x^3$ قرار دارد؟
 ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.



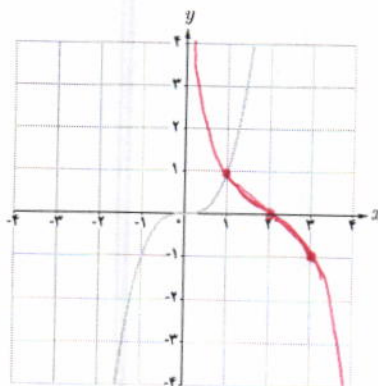
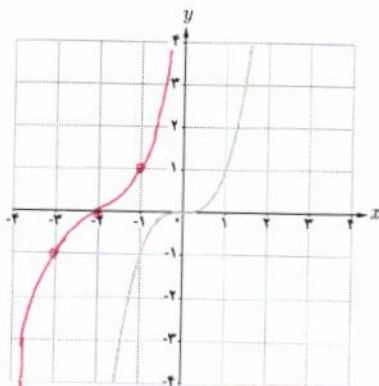
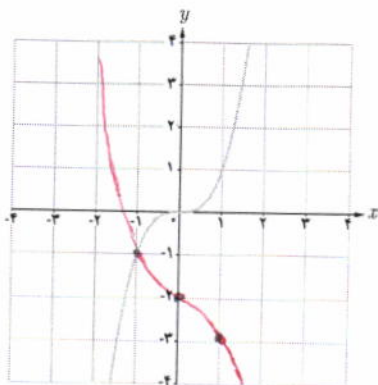
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = -x^2 - 2$

ب) $y = (x + 2)^2$

پ) $y = -(x - 2)^2$



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ (۶)

ت) $y = (x+1)^3 - 1$ (۷)

ج) $y = x^3 + 1$ (۴)

ب) $y = (x-2)^3$ (۹)

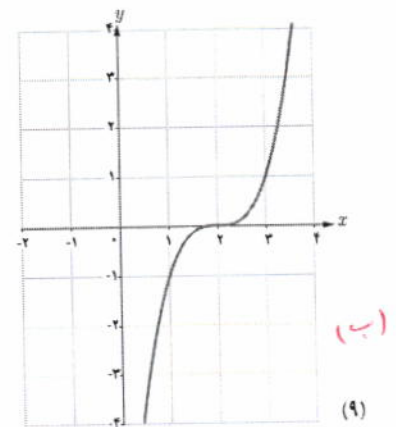
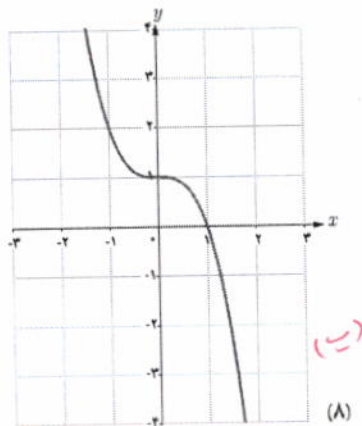
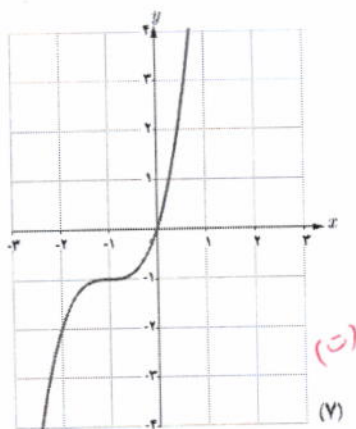
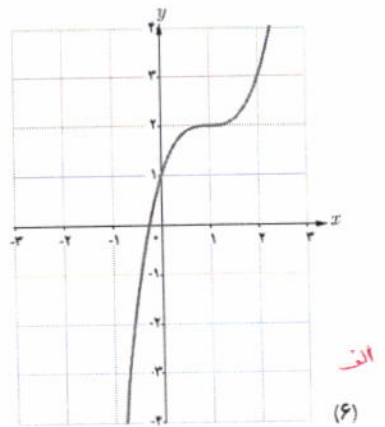
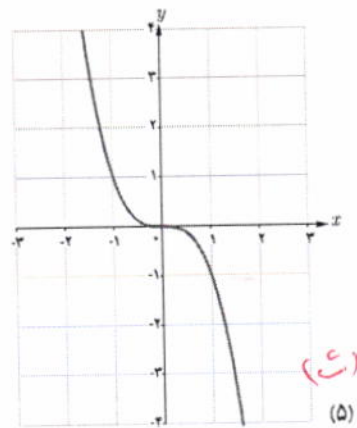
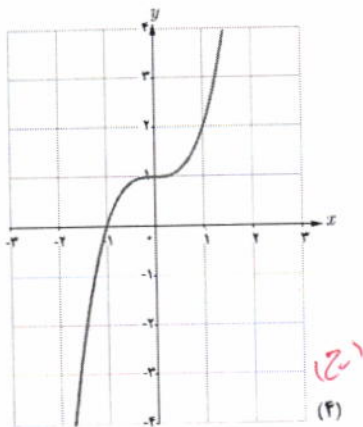
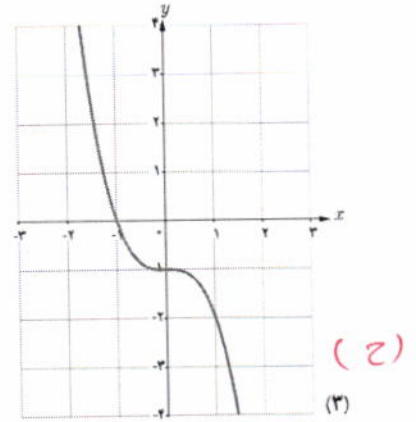
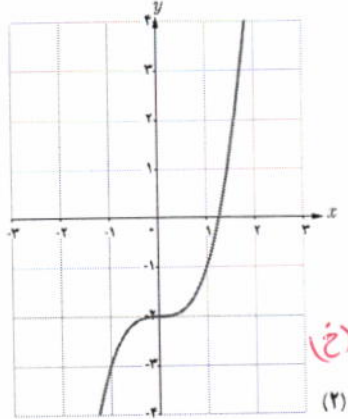
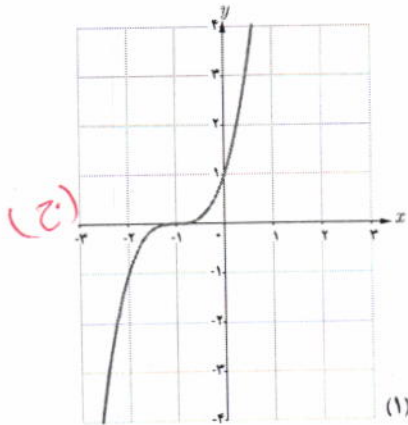
ث) $y = -x^3$ (۵)

ح) $y = -x^3 - 1$ (۳)

پ) $y = -x^3 + 1$ (۸)

ج) $y = (x+1)^3$ (۱)

خ) $y = x^3 - 2$ (۲)



توابع صعودی و توابع نزولی:

فهاایت

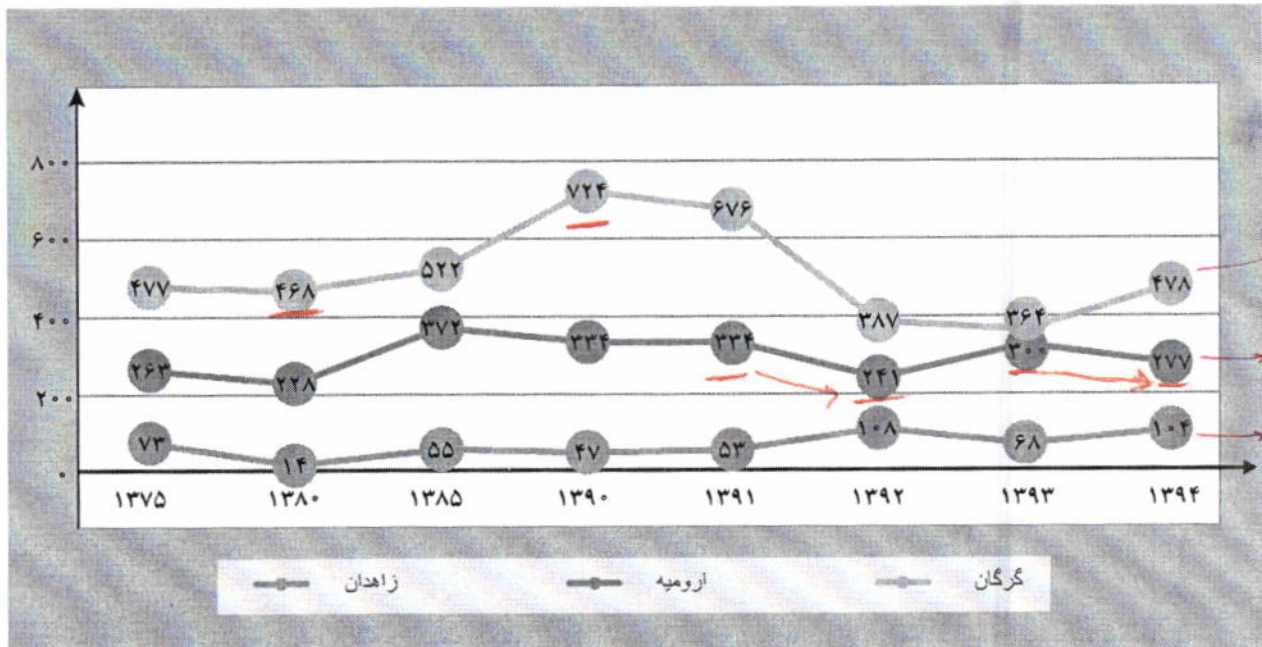
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

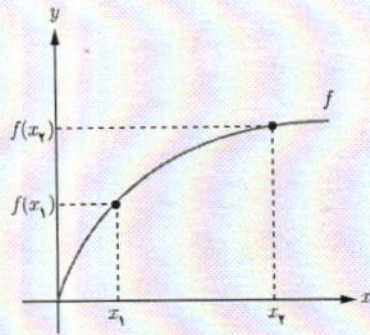
از سال ۸۵ تا ۹۰ صعودی

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

از سال ۹۱ تا ۹۳ روند نزولی
از سال ۹۳ تا ۹۴

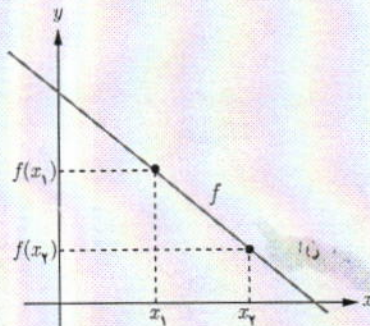


میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)^۱



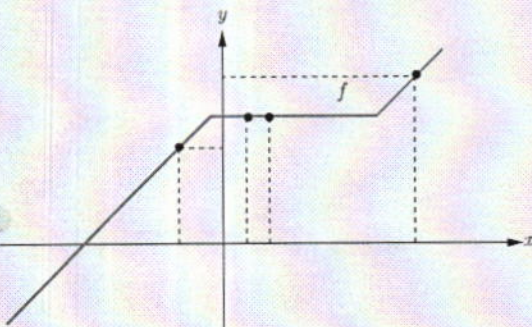
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



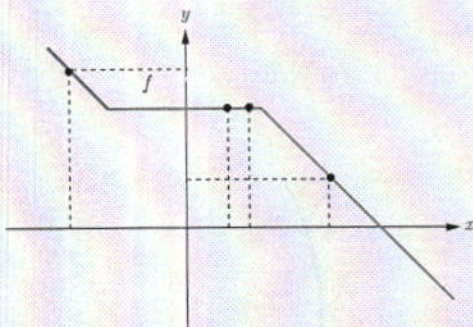
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



تابع نزولی

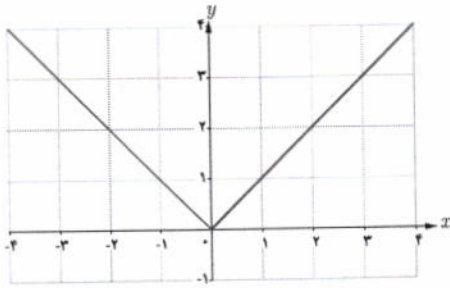
اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

$$y = |n+11| - |n-31|$$





ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

مثال: تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در \mathbb{R} نه صعودی است نه نزولی.

کار در کلاس

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

اکیداً صعودی $(-\infty, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$

اکیداً صعودی $(0, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$

اکیداً صعودی $(-\infty, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$

اکیداً صعودی $(0, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$

اکیداً صعودی $(-\infty, +\infty)$

اکیداً صعودی $(0, +\infty)$
اکیداً صعودی $(-\infty, 0)$

اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$
اکیداً نزولی $(0, +\infty)$

اکیداً صعودی $(-\infty, +\infty)$

اکیداً صعودی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
اکیداً نزولی $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$
اکیداً نزولی $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

اکیداً صعودی $(-2, +\infty)$

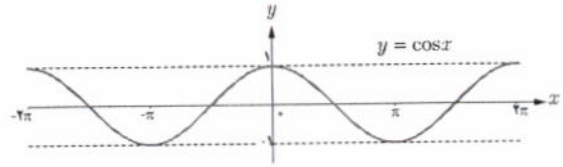
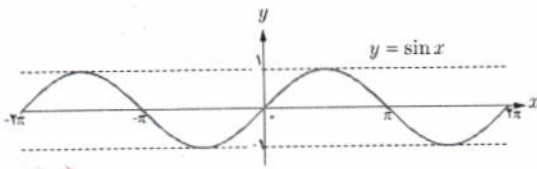
(الف) (ب) (پ)

(ت) (ث) (ج)

(ح) (خ)



نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.



x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

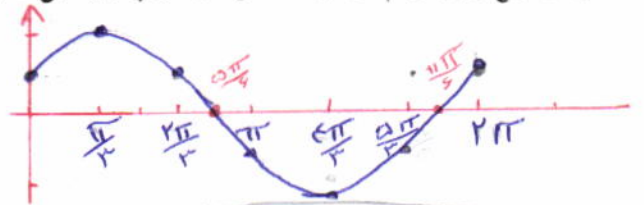
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ $D_f = [0, 2\pi]$

$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ نزولی \rightarrow صعودی $(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4})$

$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ نزولی



ب $g(x) = x + |x|$

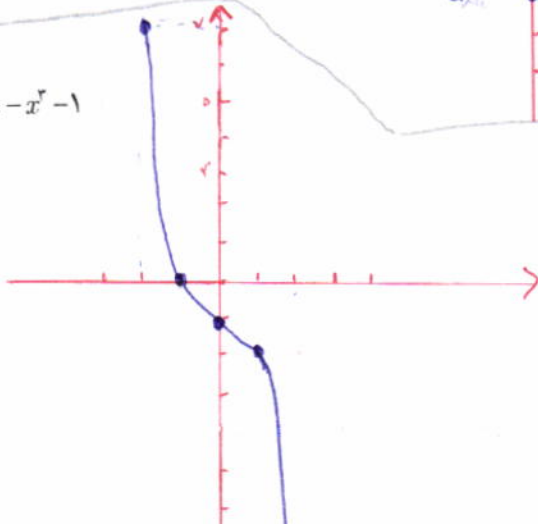
$$\cos(\pi - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$x > 0 \Rightarrow \frac{x}{|x|} = 1 \Rightarrow x = 2\pi$

$x < 0 \Rightarrow \frac{x}{|x|} = -1 \Rightarrow x = 0$

ثابت
صعودی $(-\infty, 0)$
و نزولی $(0, +\infty)$
صعودی $(0, +\infty)$

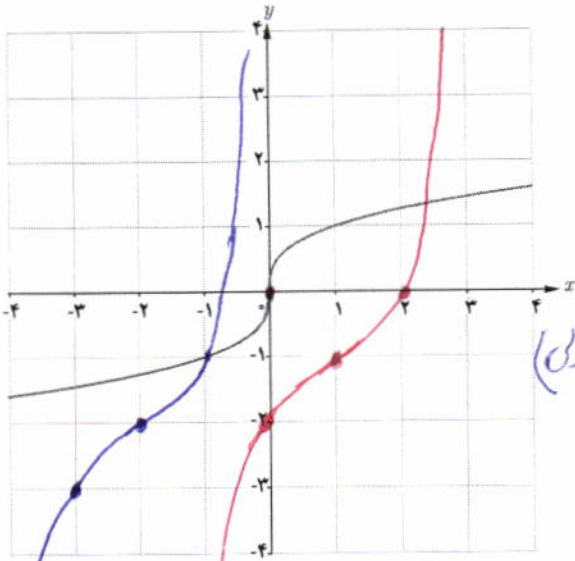
ب $t(x) = -x^2 - 1$



در \mathbb{R} ابتدا نزولی است

x	y
-2	-3
-1	-2
0	-1
1	-2
2	-3

فعالیت



به نمودار تابع رویه رو دقت کنید.
 الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ **اکیداً صعودی**
 ب) این تابع یک به یک است؟ **بلی**
 پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟ **خیر - چنین تقریباً اکیداً صعودی (نزولی)**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ (f(x_1) > f(x_2))$$

در نتیجه جدول ماسی تا برابر عرض ماسی تا برابر دارند.

x	۱	۲	۳
f(x)	-۱	-۲	-۳

تمرین

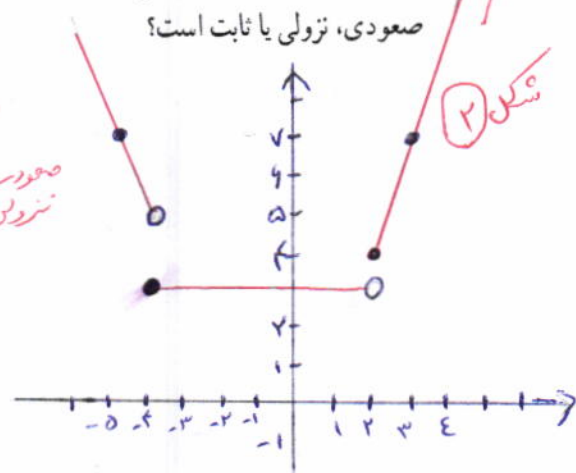
۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.
 دامنه و برد هر دو مجموعه اعداد حقیقی است
 ب) $y = (x+2)^2 - 2$

۲) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.
 با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی
 صعودی، نزولی یا ثابت است؟

دامنه و برد هر دو مجموعه اعداد حقیقی است. مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

نزولی $(-\infty, -4)$
 ثابت $(-4, 2)$
 صعودی $(2, +\infty)$



صعودی $(-\infty, -2)$
 صعودی ثابت $(-2, 2)$
 نزولی $(2, 4)$
 صعودی $(4, +\infty)$

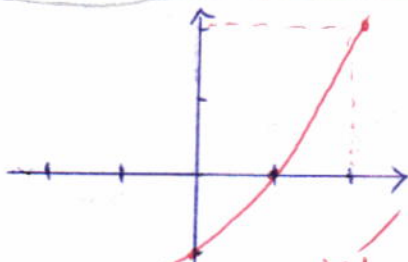
۴) تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵) تابع $y = x|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟
 ۶) تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

$y = 2^{-x}$ اکیداً صعودی است

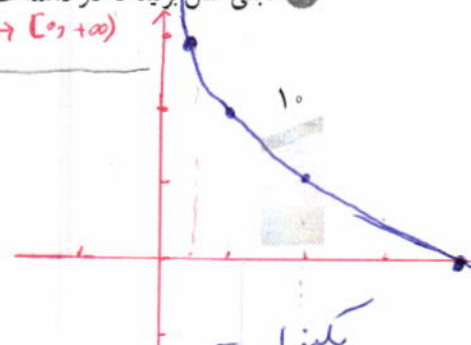
۴) $y = 2^x - 2$

x	y
-1	-3/2
0	-1



$y = -\log_2^x + 2$

x	y
1/2	3
1	2
2	1



گنجه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

-1	-9
0	0
1	-1
2	0
3	7

تقریباً نزولی
 مثبت افق
 (ب) صعودی (ا)

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (\text{واحد } t, \text{ ساعت است.})$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(2) = 10$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 10 درجه سانتی‌گراد است.

$$d(1) = 4(1) + 2 = 6$$

$$d(3) = 4(3) + 2 = 14$$

همچنین اگر یک ماده غذایی را با دمای 2 درجه سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 5000; \quad 2 \leq d \leq 14$$

ب) در این تابع، d دمای ماده غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه سانتی‌گراد است. هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 5000 = 1700$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای 10 درجه سانتی‌گراد به 1700 افزایش یافته است.

$$n(2) = 20(2)^2 - 80(2) + 5000 = 180 - 160 + 5000 = 440$$

$$n(3) = 20(3)^2 - 80(3) + 5000 = 180 - 240 + 5000 = 440$$

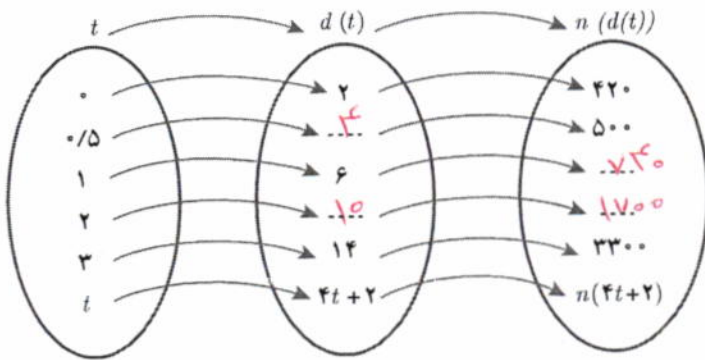
به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n ، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به دست آورد، به عبارت دیگر:

$$\text{تعداد باکتری‌ها} \xrightarrow{n} \text{دما} \xrightarrow{d} \text{زمان}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی که به میزان 2 ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 1700 تاست.

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t) = 4t + 2$	$n(d(t)) = n(4t + 2)$
۰	$d(0) = 2$	$n(d(0)) = n(2) = 420$
۰/۵	$d(0/5) = 4$	$n(d(0/5)) = n(4) = 500$
۱	$d(1) = 6$	$n(d(1)) = n(6) = 340$
۲	$d(2) = 10$	$n(d(2)) = n(10) = 1700$
۳	$d(3) = 14$	$n(d(3)) = n(14) = 3300$



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟

برای به‌دست آوردن چنین تابعی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n(d(t)) = n(4t + 2) = 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 500 = 320t^2 + 420$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

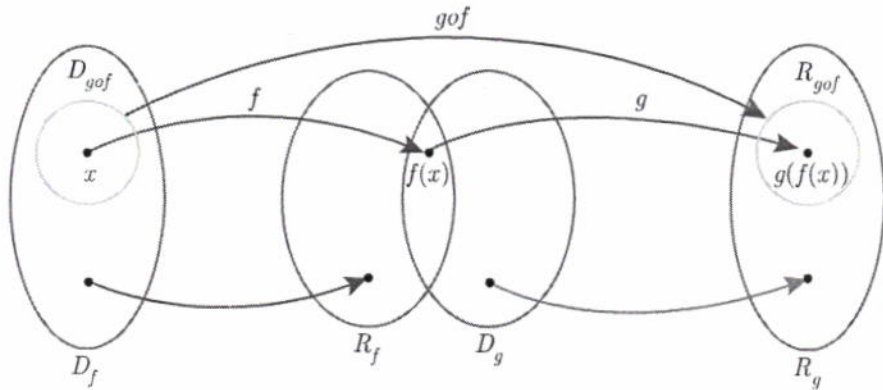
مرحله اول ساخت تابع $g(f(x))$:
 مرحله اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.

مرحله دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک نانهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

دامنه تابع مرکب:
 دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:
 ۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.
 ۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر است:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

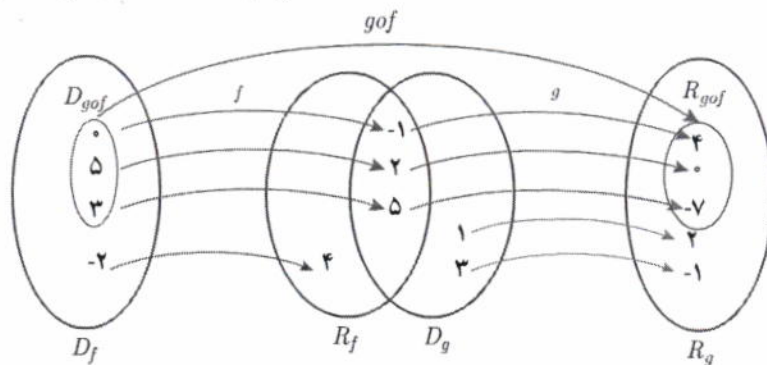
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

و همچنین:

مثال: اگر $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(-1) = 4 \\ (g \circ f)(5) &= g(f(5)) = g(2) = 0 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) \end{aligned} \right\} \rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

تعریف نشده: $(g \circ f)(-2) = g(4)$



با توجه به جدول های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	f(x)	x	g(x)
-۳	-۷	-۳	۸
-۲	-۵	-۲	۳
-۱	-۳	-۱	۰
۰	-۱	۰	-۱
۱	۲	۱	۰
۲	۵	۲	۳
۳	۵	۳	۸

الف) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = -1$

ب) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1$

پ) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 0$

ت) $(g \circ g)(-2) = g(g(-2)) = g(3) = 8$

ث) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 8$

ج) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(3) = 5$

تغییر نشود

مثال: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x-1 \geq 0$ که بازه $[1, +\infty)$ به دست می آید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازه $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$ ، بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{2x^2-1-1} = \sqrt{2x^2-2}$$

اگر دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را با هم مقایسه کنید چه نتیجه ای می گیرید؟ **نرمه یا هم برابر نیستند.**

تذکر: دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می آوریم نه از روی ضابطه آن. مثلاً در اینجا می بینیم که دامنه تابع $g \circ f$ با توجه به ضابطه آن \mathbb{R} است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\} \right\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

$$\frac{x}{x-1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$$

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-x+1} = x$$

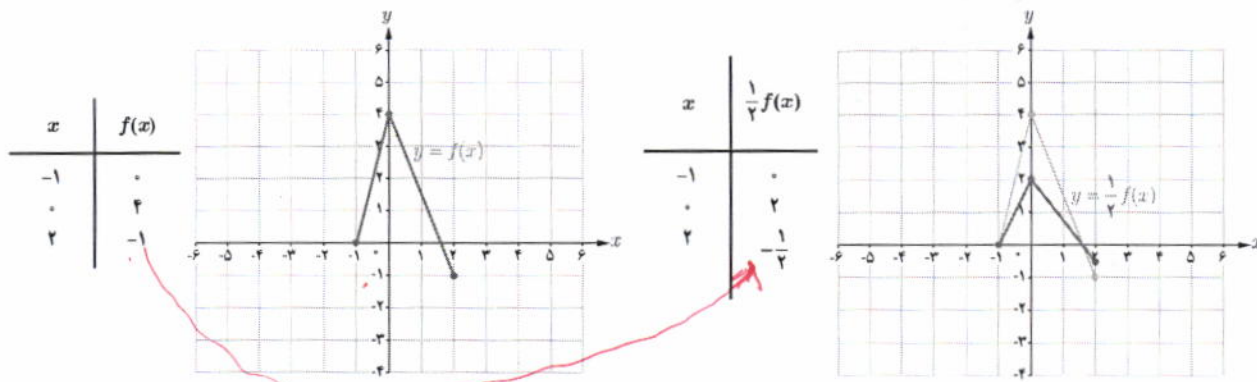
$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\} \right\} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

$$g \circ f(x) = \frac{x}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-x+1} = x$$

«تبدیل نمودار توابع»

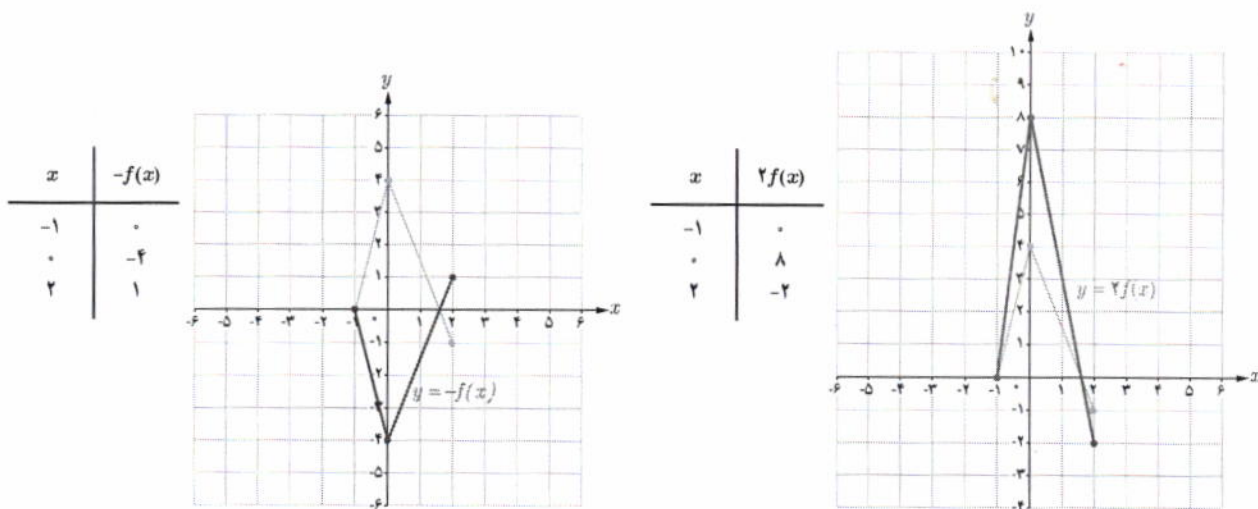
یادآوری: همان طور که در پایه یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y = \frac{1}{2}f(x)$ ، $y = -f(x)$ و $y = 2f(x)$ رسم شده است.



برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2}f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

از آنجایی که ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ و $kf(x) = 0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور x ها یکسان است.

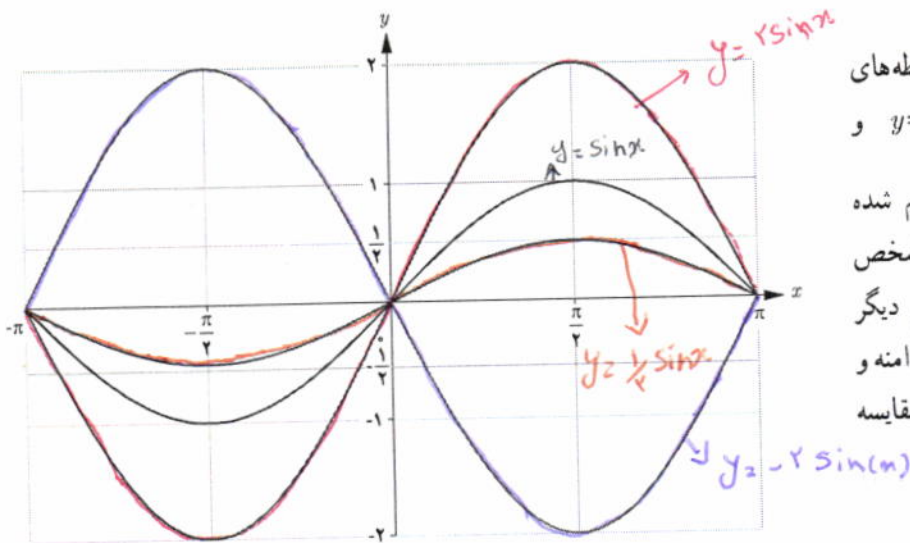
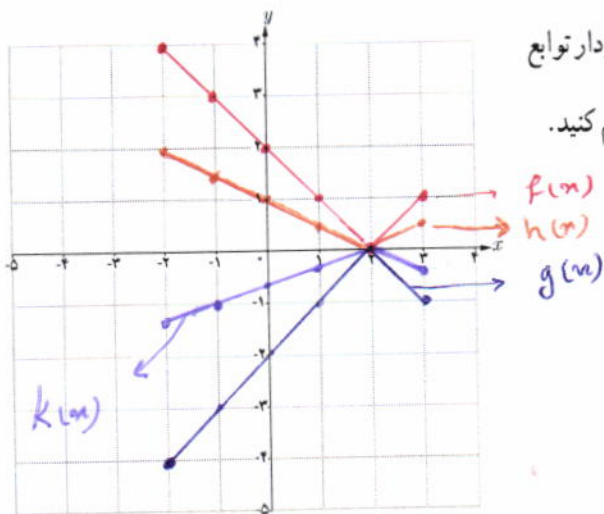


برای رسم نمودار $y = -f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در -1 ضرب می‌کنیم.

برای رسم نمودار $y = 2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در 2 ضرب می‌کنیم.

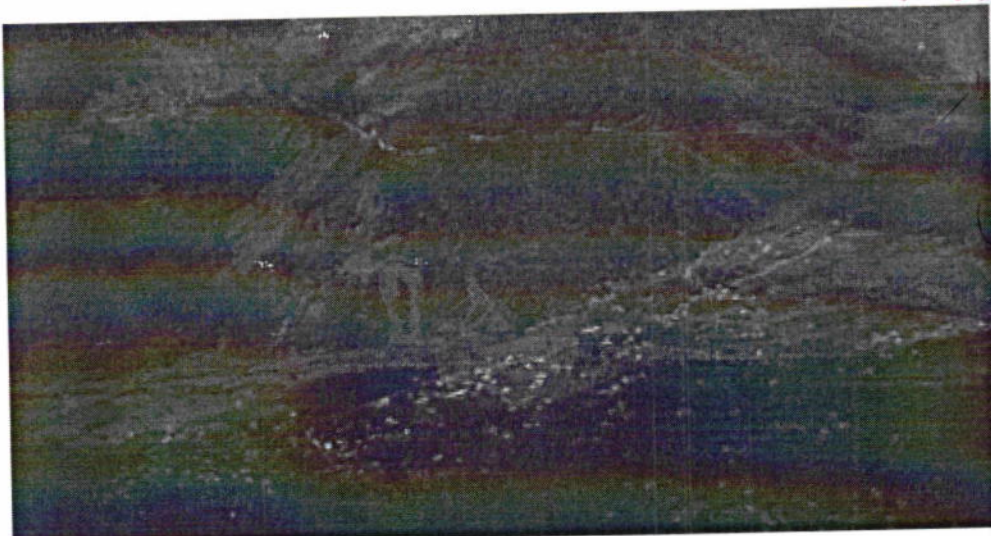
دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x) = -|x - 2|$ و $h(x) = \frac{1}{3}|x - 2|$ و $k(x) = -\frac{1}{3}|x - 2|$ را رسم کنید.



در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = -2 \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

دامنه هیچ کدام تغییر نمی‌کند.
توابع $y = 2 \sin x$, $y = -2 \sin x$, $y = \frac{1}{2} \sin x$
برابر هم عرض هر نقطه از آنها
تابع $y = \sin x$ را با حفظ
طول آن نقطه $(2, -2)$ یا $(-2, 2)$
برابر می‌کنیم.



بیلاوات تالش

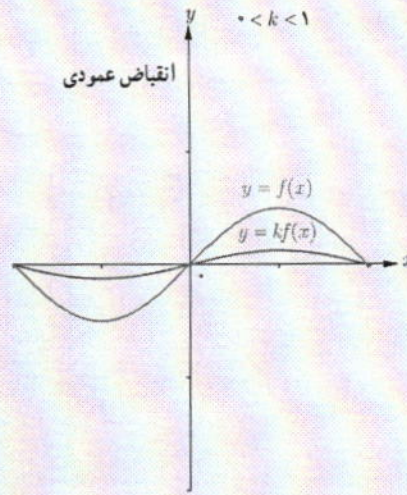
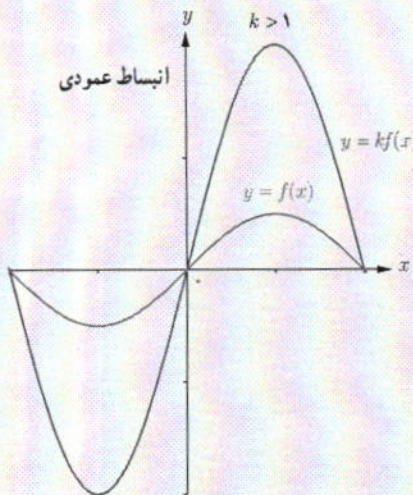
$y = 2 \sin x \rightarrow \text{برد} = [-2, 2]$
 $y = -2 \sin x \rightarrow$

$y = \frac{1}{2} \sin x \rightarrow \text{برد} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
 $y = \sin x \rightarrow \text{برد} = [-1, 1]$

می توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

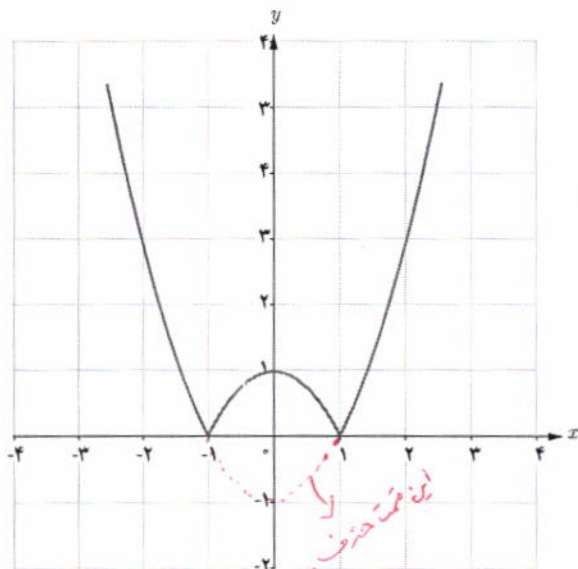
اگر $k > 0$ ، نمودار $y = kf(x)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست آورد.

اگر $k < 0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.



اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انبساط عمودی یافته است.

اگر $0 < k < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انقباض عمودی یافته است.



رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه رو نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ رسم شده است.

این قسمت حذف می شود و قرینه آن می شود
به محور x ها رسم می شود

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال: تابع $f(x) = x+3$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم. ضابطه تابع $y = f(2x)$ به صورت $f(2x) = 2x+3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$\underline{-4 \leq 2x \leq 0} \rightarrow \underline{-2 \leq x \leq 0} \rightarrow \text{دامنه } f(2x) : D = \underline{[-2, 0]}$$

همچنین ضابطه تابع $y = f(\frac{x}{2})$ به صورت $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

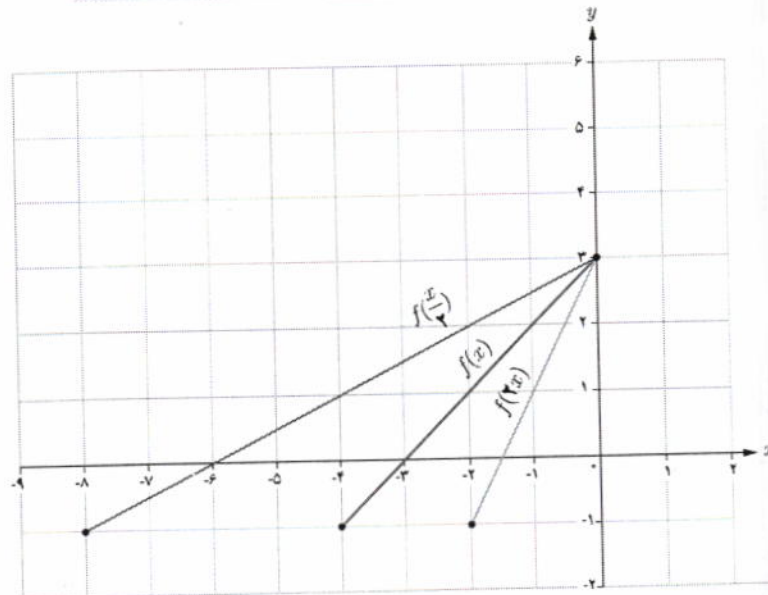
$$\underline{-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0} \rightarrow \underline{-8 \leq x \leq 0} \rightarrow \text{دامنه } f(\frac{x}{2}) : D = \underline{[-8, 0]}$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x) = x+3$	-1	0	1	2	3

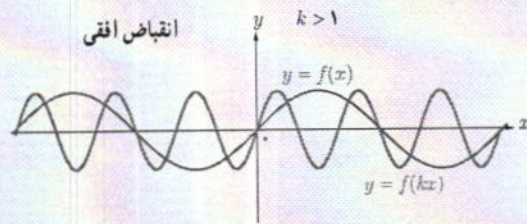
x	-2	-1/2	-1	-0.5	0
$f(2x) = 2x+3$	-1	0	1	2	3

x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$	-1	0	1	2	3

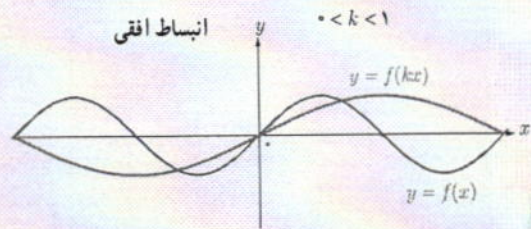


همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
 اگر $k > 0$ ، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انقباض یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.
 اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضرب $\frac{1}{|k|}$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

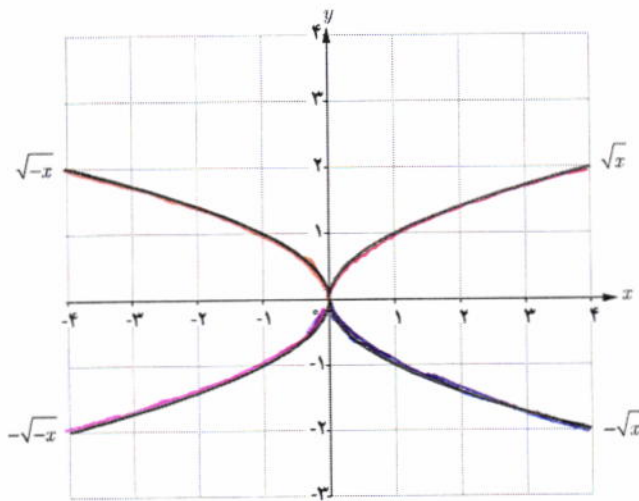
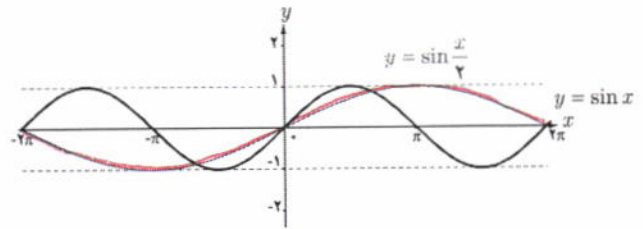
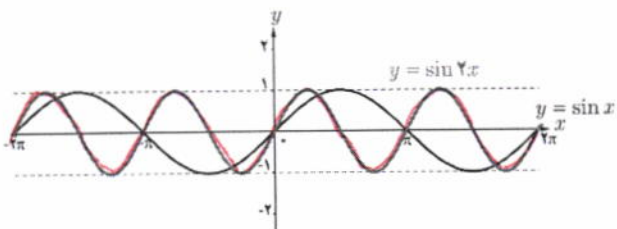


اگر $k > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin \frac{x}{2}$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها و نمودار تابع $y=\sin \frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها به دست آمده است.



کار در کلاس

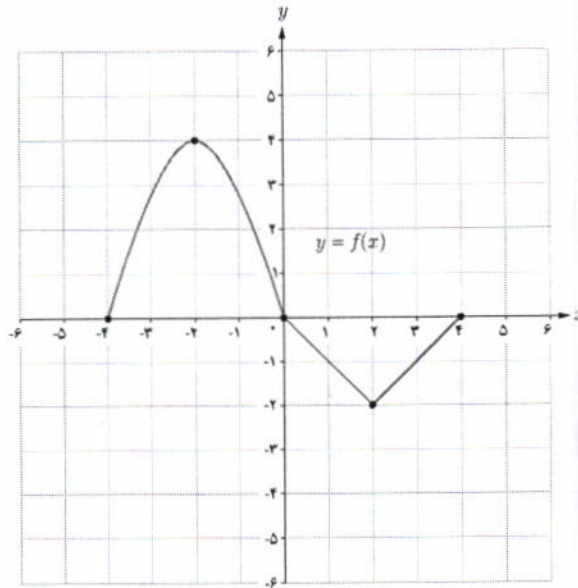
نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

$y = \sqrt{x} \quad D = [0, +\infty) \quad R = [0, +\infty)$
 $y = -\sqrt{x} \quad D = [0, +\infty) \quad R = (-\infty, 0]$
 $y = \sqrt{-x} \quad D = (-\infty, 0] \quad R = [0, +\infty)$

$y = -\sqrt{-x} \quad D = (-\infty, 0] \quad R = (-\infty, 0]$

نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ و $y=f(2x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0



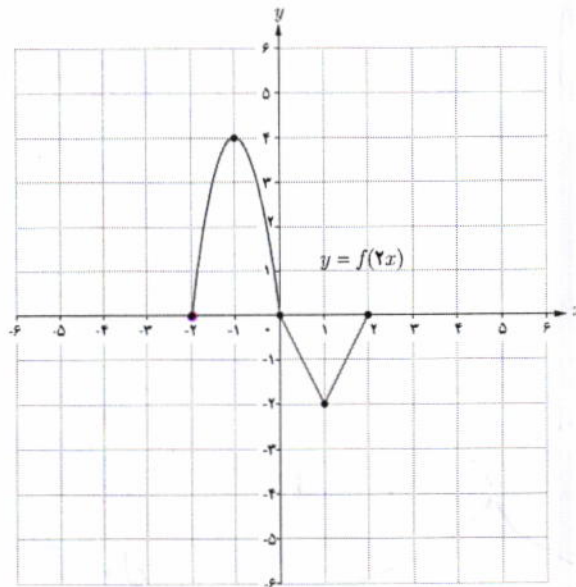
الف) برای تعیین دامنه $y=f(2x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underline{-4 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2}$$

بنابراین دامنه تابع $y=f(2x)$ بازه $[-2, 2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(2x)$ ، طول نقاط یا همان x ها باید محاسبه شود.

x	$2x$	$f(2x)$	$(x, f(2x))$
-2	-4	0	$(-2, 0)$
-1	-2	4	$(-1, 4)$
0	0	0	$(0, 0)$
1	2	-2	$(1, -2)$
2	4	0	$(2, 0)$

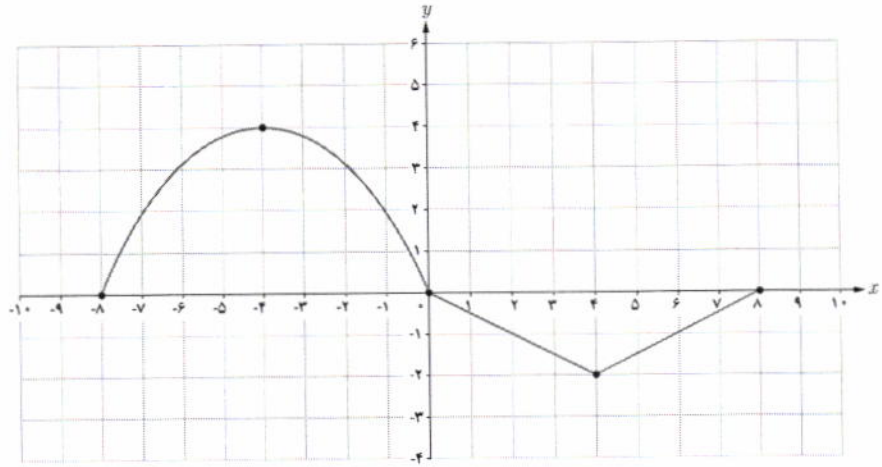


ب) برای تعیین دامنه $y=f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underline{-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 8}$$

پس دامنه تابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ بازه $[-8, 8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است :

$\frac{1}{2}x$	x	$f(\frac{1}{2}x)$
-4	-8	0
-2	-4	4
0	0	0
2	4	-2
4	8	0



همان طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطه نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در 2 ضرب می کنیم.

دامنه تابع $y=f(kx)$ با دامنه تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

خواندنی

فرش بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است. به طوری که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.



۱ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۳ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$ *نادرست*.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. *نادرست*

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$ *درست*.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$ *درست*.

۵ الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لب تاب با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنجشنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f \circ g(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 4x + 1}$

$g \circ f(x) = 3(\sqrt[5]{x})^2 - 4(\sqrt[5]{x}) + 1$

ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$k \circ l(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ✓

$l \circ k(x) = 3(x^5)^2 - 4(x^5) + 1$

۷ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; $g(x) = x^2$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

$f(x) = \sqrt{x+5}$; $g(x) = x^2$

$f \circ g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 5$

۲۲۱۲ (۲) $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sqrt{x}$ $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [0, +\infty)$

$D_{g \circ f} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \in [0, +\infty) \} = [2k\pi, (2k+1)\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin(x) \geq 0 \xrightarrow{\text{نیم اول و سوم}} x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$

$g \circ f(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sin x}$

$f(x) = x^2 - 4$ $f(g(x)) = 3x^2 - 4x + 14$ $g(x) = f$ (۳)

$f(g(x)) = (g(x))^2 - 4$

$3(g(x))^2 - 4x + 14 \stackrel{+3}{\Rightarrow} 3(g(x))^2 - 4x + 17$

$(g(x))^2 - 4 = 3x^2 - 4x + 14$

$g(x) = x^2 - 2x + 4$

<p>(۱) $f \circ g(2) = f(g(2))$ $= f(1) = 3$ $g(2) = 2(2) - 1 = 3$</p>	<p>(۲) $f \circ g(4) = f(g(4))$ $= f(7) = 0$</p>	<p>(۳) $f(x) = 3x$ $g(x) = 2x$ $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 4x$</p>	<p>(۴) $f \circ g(1) = f(g(1))$ $= f(\sqrt{1})$ $= 17$</p>
---	---	--	---

گردد ریاضی دوره دوم استان خوزستان

$f(x) = x - 0.1x = 0.9x$ $g(x) = x - 200000$ (۵)

تخفیف ۱۰٪ تخفیف نقدی

(۱) $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0.9x - 200000$

$g \circ f(200000) = 0.9(200000) - 200000 = 180000 - 200000 = -20000$

(۲) $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0.9(x - 200000) = 0.9x - 180000$

$f \circ g(200000) = 0.9(200000) - 180000 = 180000 - 180000 = 0$

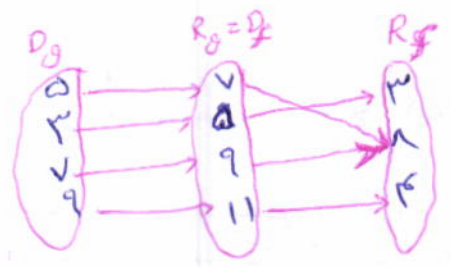
در حالت الف نفع است؛ بیشتر است

تمرین های صفحه های ۲۲، ۲۳ فصل (۱) ریاضی (۳)

ص ۲۲/۱

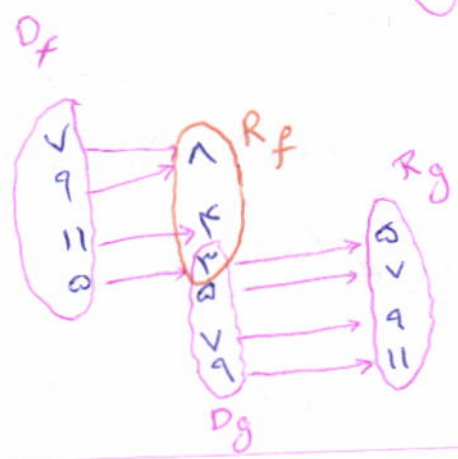
$$f = \{(v, \wedge), (a, \text{r}), (q, \wedge), (11, \text{f})\} \quad g = \{(a, v), (r, a), (v, q), (q, 11)\}$$

$$f \circ g = \{(a, \wedge), (r, \text{r}), (v, \wedge), (q, \text{f})\}$$



$$g \circ f = \{(a, a)\}$$

گروه ریاضی دوره دوم
استاد خورشید



الف) $f(x) = x^2 - a$ $g(x) = \sqrt{x+4}$ $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [-4, +\infty)$ (۲)

$$D_{f \circ g} = \{x \in [-4, +\infty) \mid \sqrt{x+4} \in \mathbb{R}\} = [-4, +\infty)$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+4})^2 - a = x+4-a = x+1$$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ $g(x) = \frac{4}{3x-a}$ $D_f = (-\infty, \frac{3}{2}]$ $D_g = \mathbb{R} - \{\frac{a}{3}\}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} - \{\frac{a}{3}\} \mid \frac{4}{3x-a} \in (-\infty, \frac{3}{2}]\} = [2, +\infty)$$

$$\frac{4}{3x-a} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3x-a} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3x-a}{2} \geq \frac{4}{3} \Rightarrow 3x \geq \frac{8}{3} + a \Rightarrow x \geq \frac{8}{9} + \frac{a}{3}$$

$x \in [2, +\infty)$

$$f \circ g(x) = \sqrt{3 - 2 \left(\frac{4}{3x-a} \right)} = \sqrt{\frac{9x - 8 - 8}{3x-a}} = \sqrt{\frac{9x - 16}{3x-a}}$$

ج) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $g(x) = \sqrt{x^2-14}$ $D_f = [-2, +\infty)$ $D_g = (-\infty, \sqrt{14}] \cup [\sqrt{14}, +\infty)$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty, \sqrt{14}] \cup [\sqrt{14}, +\infty)\} = [14, +\infty)$$

$\sqrt{x+2} \leq \sqrt{14} \Rightarrow x \leq 10$ (همه اعداد مثبت)

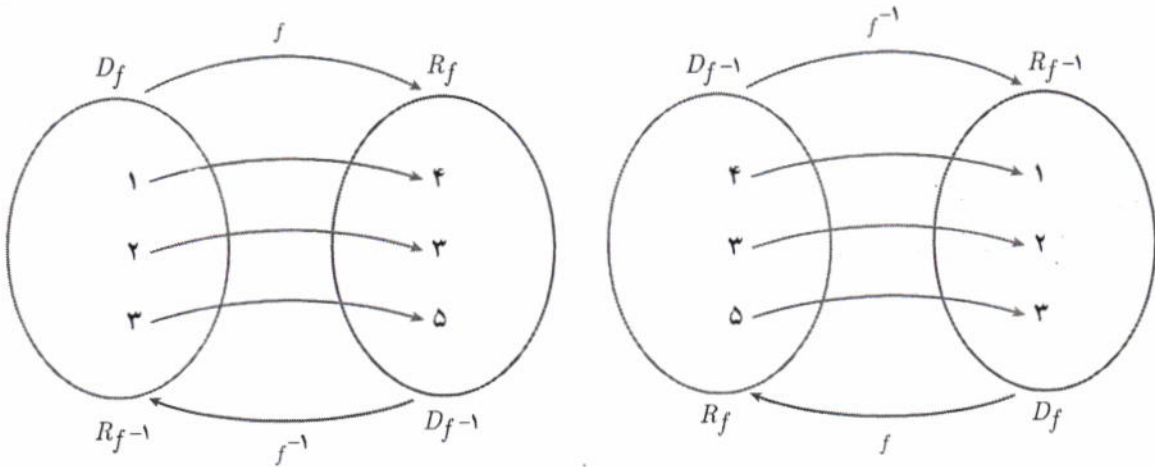
$$g \circ f(x) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 14} = \sqrt{x+2-14} = \sqrt{x-12}$$

همچنین:

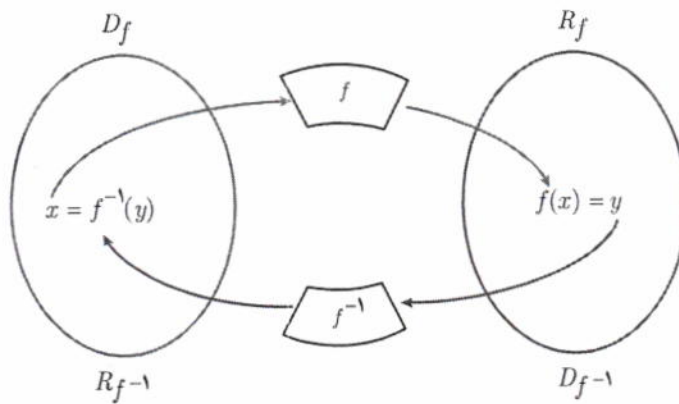
$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \\ (f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3 \end{cases}$$

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f داریم:



به طور کلی اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد.



اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$f(f^{-1}(x)) = x ; x \in D_{f^{-1}}$

$f^{-1}(f(x)) = x ; x \in D_f$

توجه به تفاوت دامنه ها

با توجه به آنچه که دیدیم می توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه ای باشند که:

(الف) $(f \circ g)(x) = x ; x \in D_g$

(ب) $(g \circ f)(x) = x ; x \in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال: نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x+4}{3}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

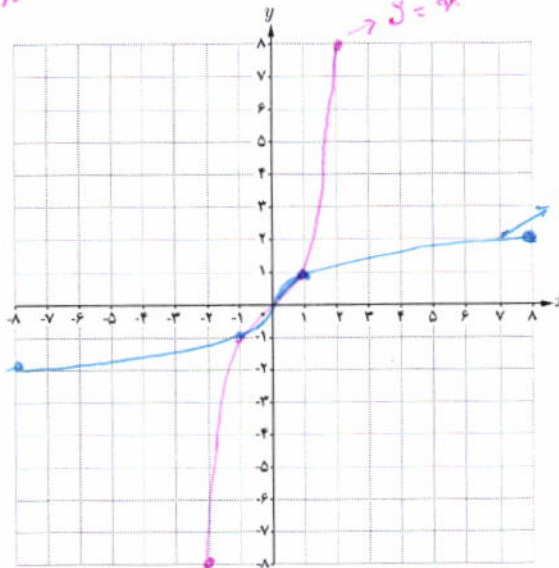
کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^3$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه تابع وارون چیست؟

$$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

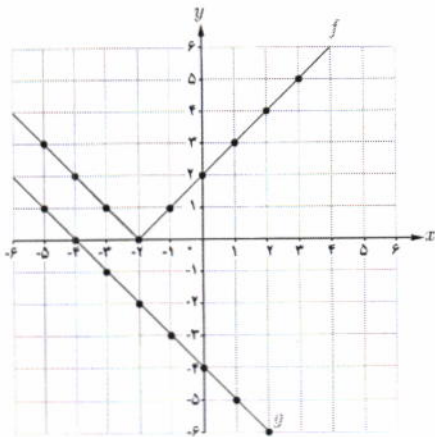
$$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$
 $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$
 پس این تابع یک به یک است

۱- توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجه دوم، $\sqrt{ax+b}$ ، x^2 و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = 1$

ب) $(gof)(0) = g(f(0)) = 4$

پ) $(fog)(1) = f(g(1)) = 5$

ت) $(gof)(-1) = g(f(-1)) = -5$

$g \circ f(4)$ وجود ندارد مساوی است

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(fog)(x) = 7$

$2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 16 - 5 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 11 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=2$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، $g(x) = 1 - 2x$: $(gof)(x) = -5$

$3x^2 + x - 1 = 1 - 2(1 - 2x) \Rightarrow 3x^2 + x - 1 = 1 - 2 + 4x \Rightarrow 3x^2 + x - 1 = -1 + 4x \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x-1) = 0 \Rightarrow x=0, x=1$

$1 - 2(3x^2 + x - 1) = -5 \Rightarrow -6x^2 - 2x + 2 = -5 \Rightarrow -6x^2 - 2x + 7 = 0 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 7 = 0$

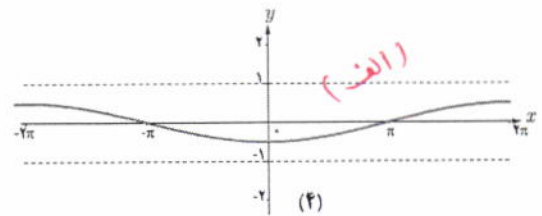
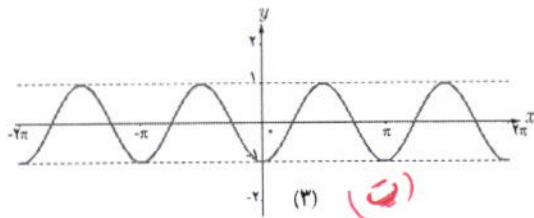
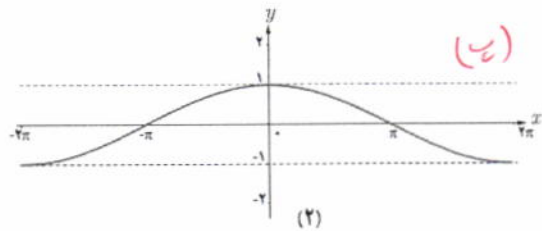
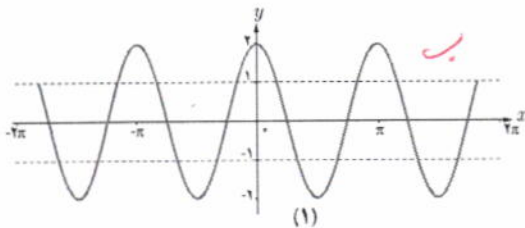
۱۰ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ نمودار زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$ (۴)

ب) $y = 2 \cos 2x$ (۱)

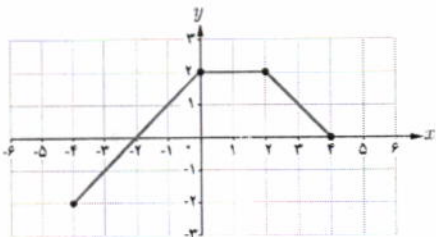
پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ (۳)

ت) $y = -\cos 2x$ (۲)



۱۱ نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

پ) $y = 2f(x-1) - 3$

ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$



$\Delta = (1)^2 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{-1 + 7}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{-1 - 7}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

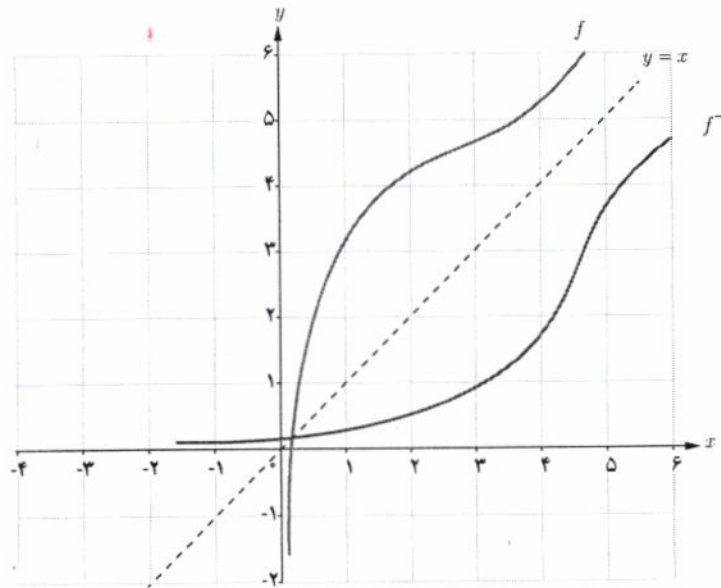
ارائه سوال ۹ صحت ب

یادآوری

همان طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک به یک f ، تابعی جدید به دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ آن‌گاه:

$$f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(1) = 4 \\ (fof^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(2) = 3 \rightarrow fof^{-1} = \{(4, 4), (3, 3), (5, 5)\} \\ (fof^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(3) = 5 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} داریم:

$$(fof^{-1})(x) = x$$

$g(x) = -x^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = -x^2 & x \geq 0 \rightarrow [0, +\infty) \\ g(x) = -x^2 & x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \end{cases}$ (4)

$h(x) = x^2 + \epsilon x + 3 \Rightarrow h(x) = (x+2)^2 - 1$
 $\hookrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{\epsilon}{2(1)} = -2$

$\begin{cases} h(x) = x^2 + \epsilon x + 3 & x \leq -2 & (-\infty, -2] \\ h(x) = x^2 + \epsilon x + 3 & x \geq -2 & [-2, +\infty) \end{cases}$

بازویار نوشته شده بزرگترین یا به عنوان دامنه
 زیر مجموعه‌ها از هر کدام از این بازه
 برابر یک به یک بودن توابع است می‌توان
 ما را نیز معرفی کنید

از درج نمودار (5)

x	-4	-2	2	4
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-4	-2	2	4

$(x, y) \in f(x) \Rightarrow (y, x) \in f^{-1}(x)$

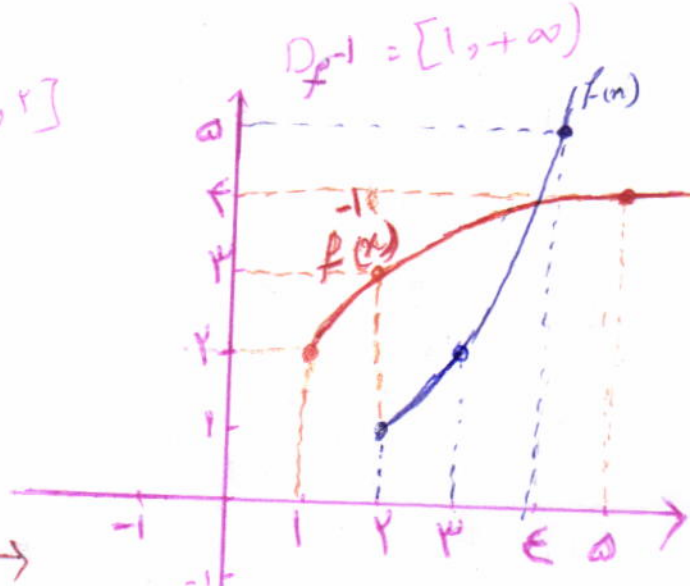
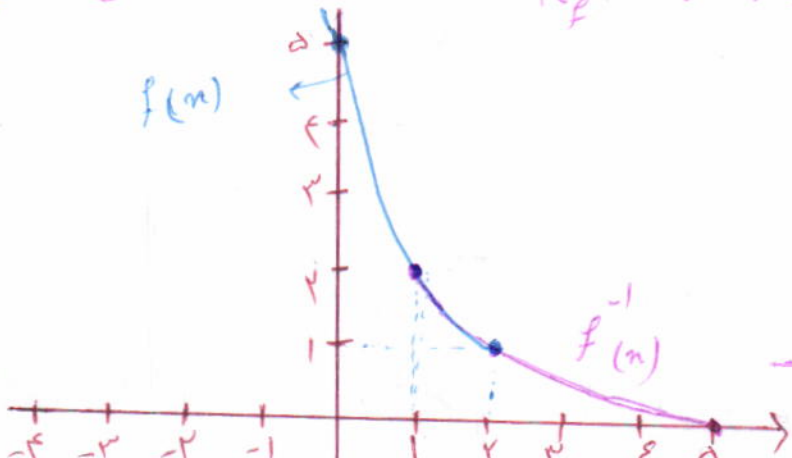
$f(x) = x^2 - \epsilon x + \omega \Rightarrow f(x) = x^2 - \epsilon x + \epsilon - \epsilon + \omega = (x-2)^2 + 1$ (6)

$R_f = [1, +\infty)$
 دامنه یا زیر مجموعه‌ها $(-\infty, 2]$ یا $[2, +\infty)$ یا زیر مجموعه‌هایی از این دو مجموعه باشند.

$y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-2)^2 \Rightarrow \pm \sqrt{y-1} = x-2 \Rightarrow$
 $x = \pm \sqrt{y-1} + 2$
 $\begin{cases} x \geq 2 & y = +\sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2 \\ x \leq 2 & y = -\sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} + 2 \end{cases}$

(1) $R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

(2) $R_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$



الف) $f(x) = \frac{-x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-x+3}{2} \Rightarrow 2y = -x+3 \Rightarrow 2y-3 = -x$
 $\frac{2y-3}{-1} = x \Rightarrow \frac{-2y+3}{1} = x \Rightarrow \frac{-2x+3}{1} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x+3}{1}$

ب) $g(x) = -d - \sqrt{3x+1} \Rightarrow y = -d - \sqrt{3x+1} \Rightarrow y+d = -\sqrt{3x+1} \Rightarrow$
 $(y+d)^2 = (-\sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow (y+d)^2 = 3x+1 \Rightarrow (y+d)^2 - 1 = 3x \Rightarrow$
 $\frac{(y+d)^2 - 1}{3} = x \Rightarrow \frac{(x+d)^2 - 1}{3} = y \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+d)^2 - 1}{3}$
 گزیده ریاضی دوره دوم استان خوزستان

الف) $f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} - 3$, $g(x) = -\frac{x+4}{\sqrt{x}}$ (۴)
 $f \circ g(x) = f(g(x)) = -\frac{\sqrt{-\frac{x+4}{\sqrt{x}}}}{2} - 3 = x + 3 - 3 = x$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = -\frac{2(-\frac{\sqrt{x}}{2} - 3) + 4}{\sqrt{-\frac{\sqrt{x}}{2} - 3}} = -\frac{-\sqrt{x} - 4 + 4}{\sqrt{-\frac{\sqrt{x}}{2} - 3}} = x$
 $g \circ f(x) = f \circ g(x) = x \Rightarrow f$ و g وارون یکدیگرند

ب) $f(x) = -\sqrt{x-1}$, $g(x) = 1+x^2$, $x \leq 0$
 $f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{(1+x^2)-1} = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1 + (-\sqrt{x-1})^2 = 1 + x - 1 = x$
 $g \circ f(x) = f \circ g(x) = x \Rightarrow f$ و g وارون یکدیگرند

الف) $f(x) = \frac{2}{3}x + 32 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 32 \Rightarrow y - 32 = \frac{2}{3}x \Rightarrow$ (۵)
 $(y-32) \frac{3}{2} = x \Rightarrow \frac{3}{2}y - \frac{144}{2} = x \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{144}{2} = y \Rightarrow$
 $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{144}{2}$
 درجه فارسیات را به درجه سانتی گراد تبدیل کنید

الف) $f(x) = |x| \Rightarrow \begin{cases} f(x) = |x| & x \geq 0 \end{cases}$ (۶)

$$(ب) g^{-1} \circ f^{-1}(\omega) = g^{-1}(f^{-1}(\omega)) = g^{-1}(44) = 4$$

$$f(x) = \omega \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x - 3 = \omega \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = \omega + 3 \Rightarrow x = 44 \Rightarrow f^{-1}(\omega) = 44$$

$$g(x) = 44 \Rightarrow x^3 = 44 \Rightarrow x = 4$$

(الف) $f \circ g(x) = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3 \Rightarrow y = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3 \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{\lambda}x^3 \Rightarrow \lambda(y + 3) = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\lambda(y + 3)} = x \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = \sqrt[3]{\lambda(y + 3)}$



عکاس: یختیار رنجبری

روستای رهلی داغلار - آذربایجان شرقی

ادامع آید $\Rightarrow (f \circ g)^{-1}(\omega) = \sqrt{\lambda(\omega) + 12} = \sqrt{44} = 4$

(ب) $f^{-1}(n) = \lambda n + 12$ $f^{-1} \circ f^{-1}(n) = \lambda(\lambda n + 12) + 12 = 44n + 114$

$$f^{-1} \circ f^{-1}(4) = 44(4) + 114 = 176 + 114 = 290$$

(ج) $g(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x \Rightarrow \sqrt[3]{n} = y$
 $g^{-1}(n) = \sqrt[3]{n}$ $f^{-1}(n) = \lambda n + 12$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(n) = g^{-1}(f^{-1}(n)) = \sqrt[3]{\lambda n + 12} \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}(\omega) = \sqrt[3]{\lambda(\omega) + 12} = \sqrt[3]{44} = 4$$

۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

۲ در مورد هر یک از قسمت های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-y}{y}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{y}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8+x^2; x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

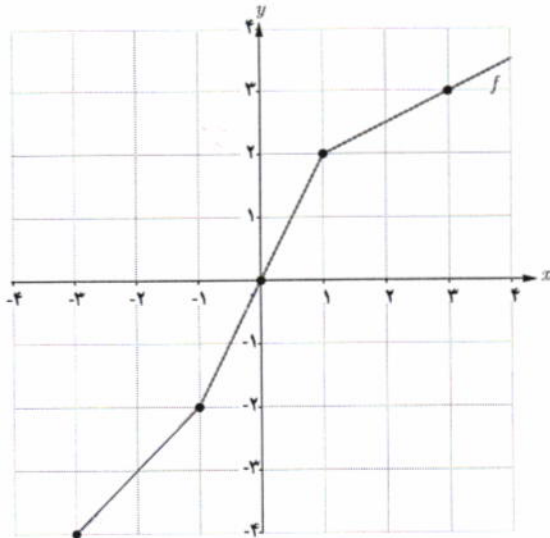
۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها به دو روش متفاوت توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

ب) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$

۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو

تابع را رسم کنید.

۷ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ مقادیر زیر را به دست آورید.
 الف) $(fog)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ ج) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

روش حل ناسود

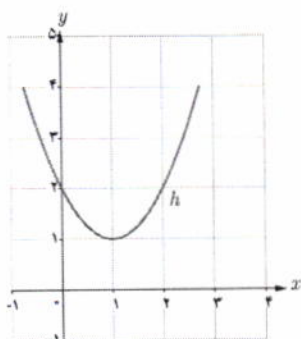
روش اول

الف) $f \circ g^{-1}(5) \Rightarrow f \circ g^{-1}(5) = 5$
 $f \circ g^{-1}(5) = 4$

$\frac{1}{8}x^2 - 3 = 5 \Rightarrow \frac{1}{8}x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

ب) $f^{-1} \circ f^{-1}(4) = f^{-1}(f^{-1}(4)) = f^{-1}(2) = 400$

بسته بسته



مثال: نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

مثلاً دامنه تابع h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطه $h(x)$ برابر است اما دامنه تابع h مجموعه اعداد حقیقی و دامنه تابع k بازه $[1, +\infty)$ است.

در تابع k ، x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

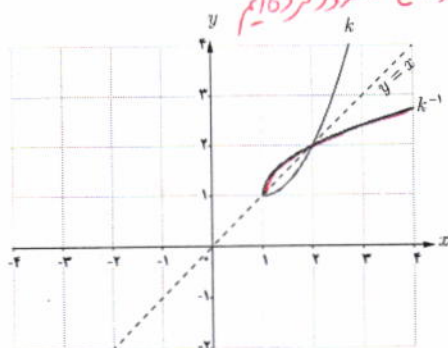
$$(x-1)^2 = y - 1$$

$$x-1 = \pm\sqrt{y-1}$$

$$x = \pm\sqrt{y-1} + 1$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

جواب منفی غیر قابل قبول است. (چرا؟) چون دامنه h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود کرده‌ایم.



نمودار توابع k و k^{-1} به صورت زیر است:

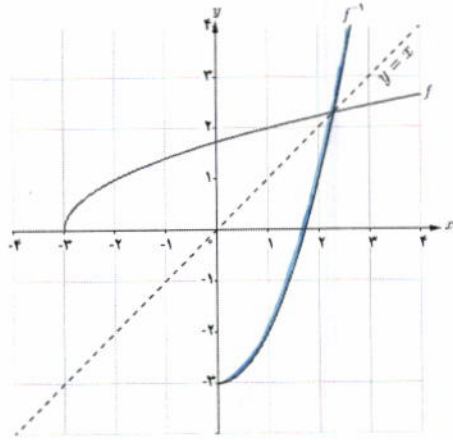


باغ ارم شیراز

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید. تابع f یک به یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+3} \\ y^2 &= x+3 \\ x &= y^2 - 3 \\ f^{-1}(y) &= y^2 - 3 \\ f^{-1}(x) &= x^2 - 3 \end{aligned}$$



* $D_{g^{-1}} = [1, +\infty)$
 $R_{g^{-1}} = [2, +\infty)$

$D_f = R_f = \mathbb{R}$

کار در کلاس

ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

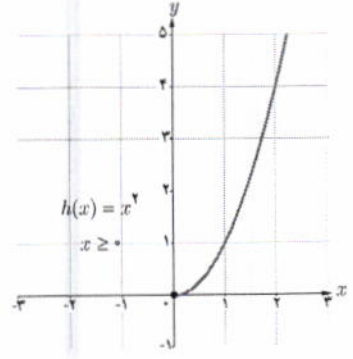
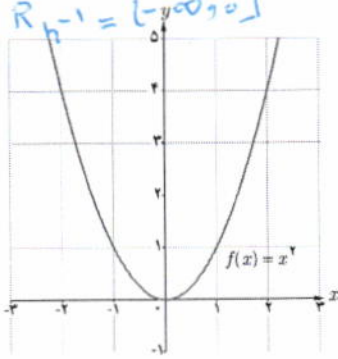
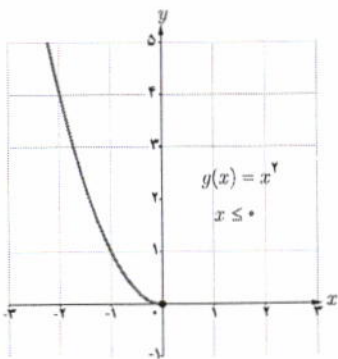
الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \Rightarrow -2y + 6 = x \Rightarrow x = -2y + 6 \Rightarrow f^{-1}(y) = -2y + 6$

ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ $\Rightarrow y = 1 + \sqrt{x-2} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x-2} \Rightarrow (y-1)^2 = x-2 \Rightarrow x = (y-1)^2 + 2 \Rightarrow g^{-1}(y) = (y-1)^2 + 2$

ج) $h(x) = x^2 + 1$ $\Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y-1} = x$ (محدود کردن دامنه تابع $h^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$)

د) $h(x) = x^2 + 1$ $\Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \Rightarrow -\sqrt{y-1} = x$ (محدود کردن دامنه تابع $h^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$)

از سال قبل می دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ یا زیر مجموعه هایی از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می آید.

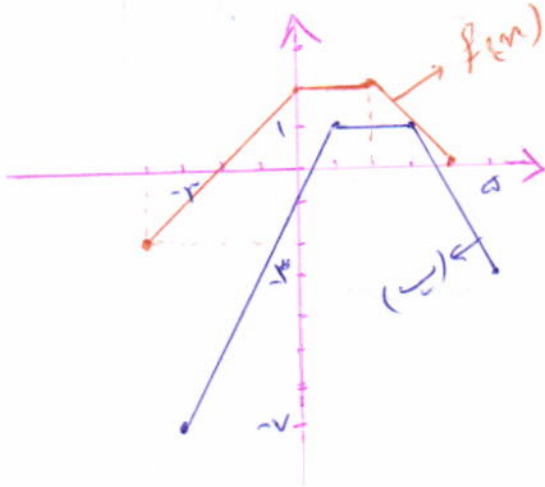


$$c) y = r f(n-1) - r$$

$r \neq 1$

$$y = \begin{cases} r[-(n-1) + r] - r = -rn + r^2 \\ r(r) - r = 1 \\ r((n-1) + r) - r = rn - 1 \end{cases}$$

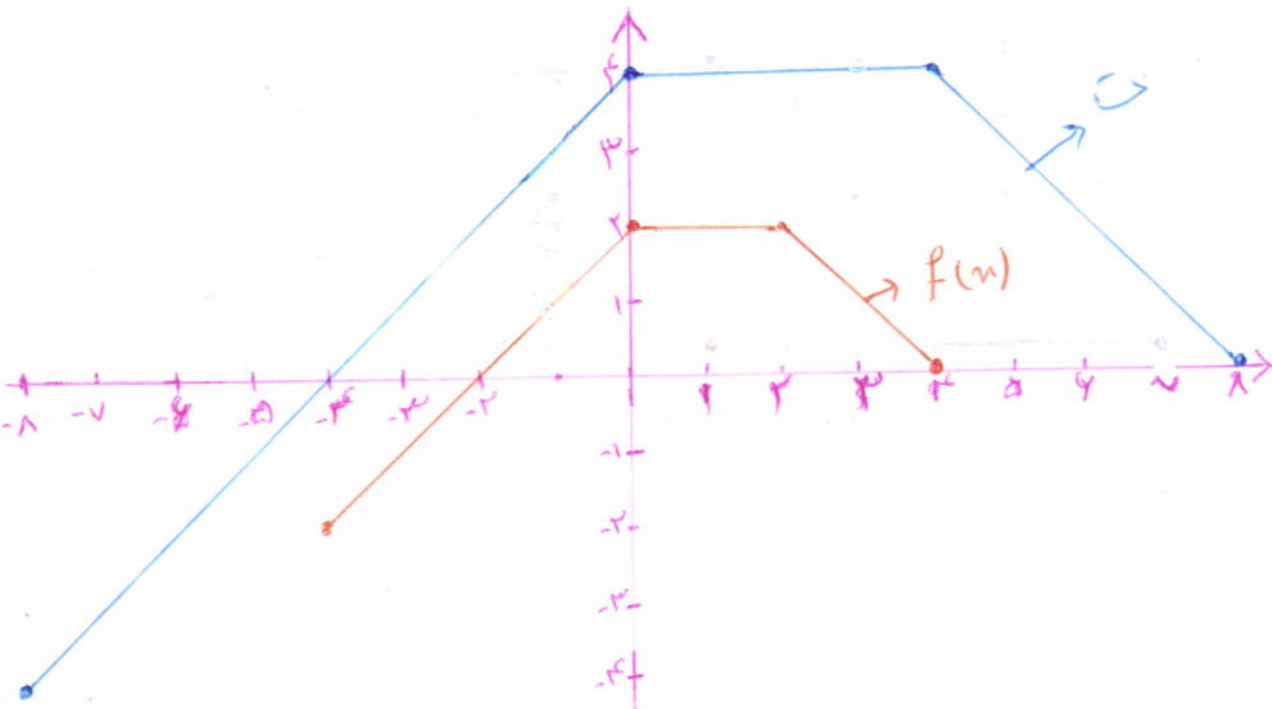
$$\begin{aligned} r \leq n \leq a &\Leftrightarrow r \leq n-1 \leq a \\ 1 \leq n < r &\Leftrightarrow 0 < n-1 < r \\ -r \leq n \leq 1 &\Leftrightarrow -r \leq n-1 \leq 0 \end{aligned}$$



$$c) y = r f\left(\frac{1}{r}n\right)$$

$$y = \begin{cases} r\left(-\frac{1}{r}n + r\right) = -n + r \\ r(r) = r \\ r\left(\frac{1}{r}n + r\right) = n + r \end{cases}$$

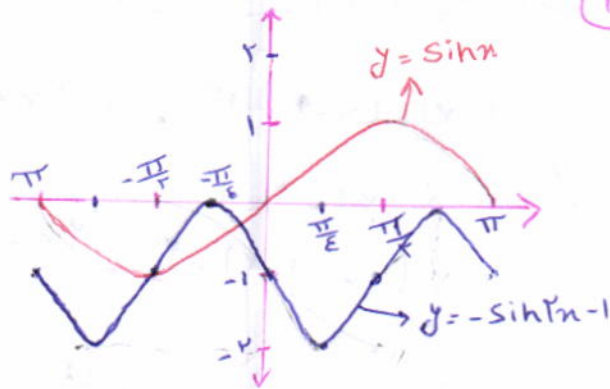
$$\begin{aligned} \epsilon \leq n \leq \lambda &\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{r}n \leq \epsilon \\ 0 \leq n < \epsilon &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{r}n \leq r \\ -\lambda \leq n \leq 0 &\Leftrightarrow -r \leq \frac{1}{r}n \leq 0 \end{aligned}$$



۲۲/۷

$$y = -\sin 2x - 1 \quad [-\pi, \pi]$$

$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0	-1

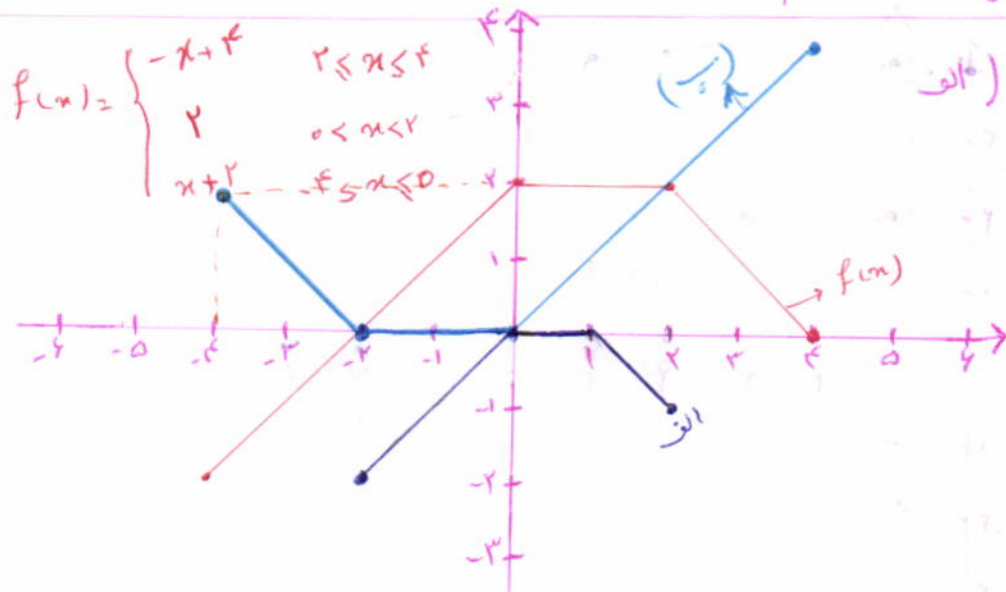
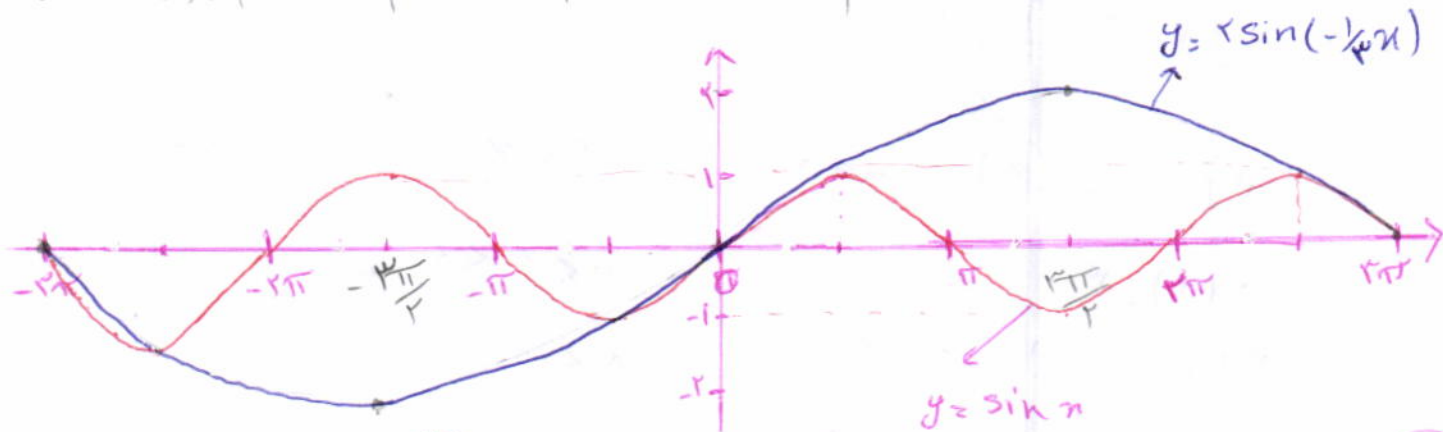


(11)

$$y = 2 \sin(-\frac{1}{4}x)$$

گروه ریاضی دوره‌ی دوم
استان خوزستان

x	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$y = 2 \sin(-\frac{1}{4}x)$	0	-2	0	2	0



الف) $y = \frac{1}{r} f(rx) - 1$

$$y = \begin{cases} -x+1 & 1 \leq x \leq r \in r \leq rx \leq r \\ 1 & 0 < x < 1 \in 0 < rx < r \\ x & -r < rx \leq 0 \in -r \leq x \leq 0 \end{cases}$$

(12)

ب) $y = -f(-x) + r$

$$y = \begin{cases} -(-(-x)+r)+r = -x-r \\ -(-r)+r = 0 \end{cases}$$

$$-r \leq rx \leq -r \iff r \leq -x \leq r$$

$$-r < rx < 0 \iff 0 < -x < r$$



انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

تناوب و تانژانت

درس اول

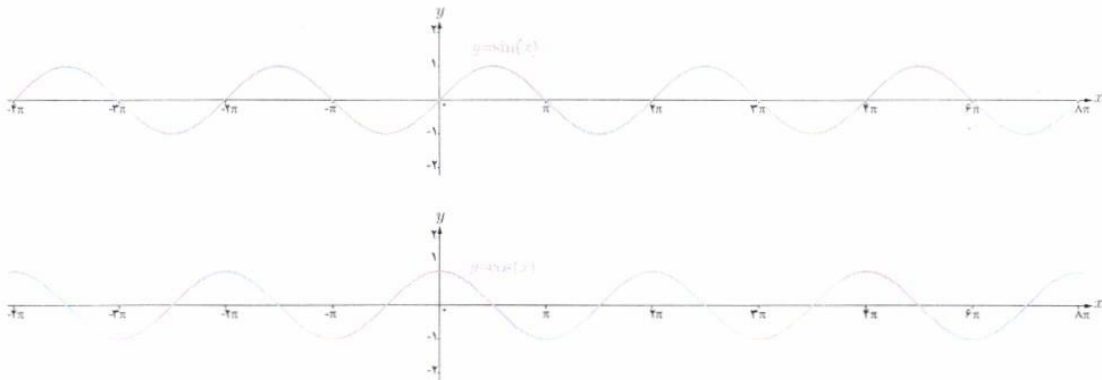
معادلات مثلثاتی

درس دوم

درس اول

تناوب و تناوبت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



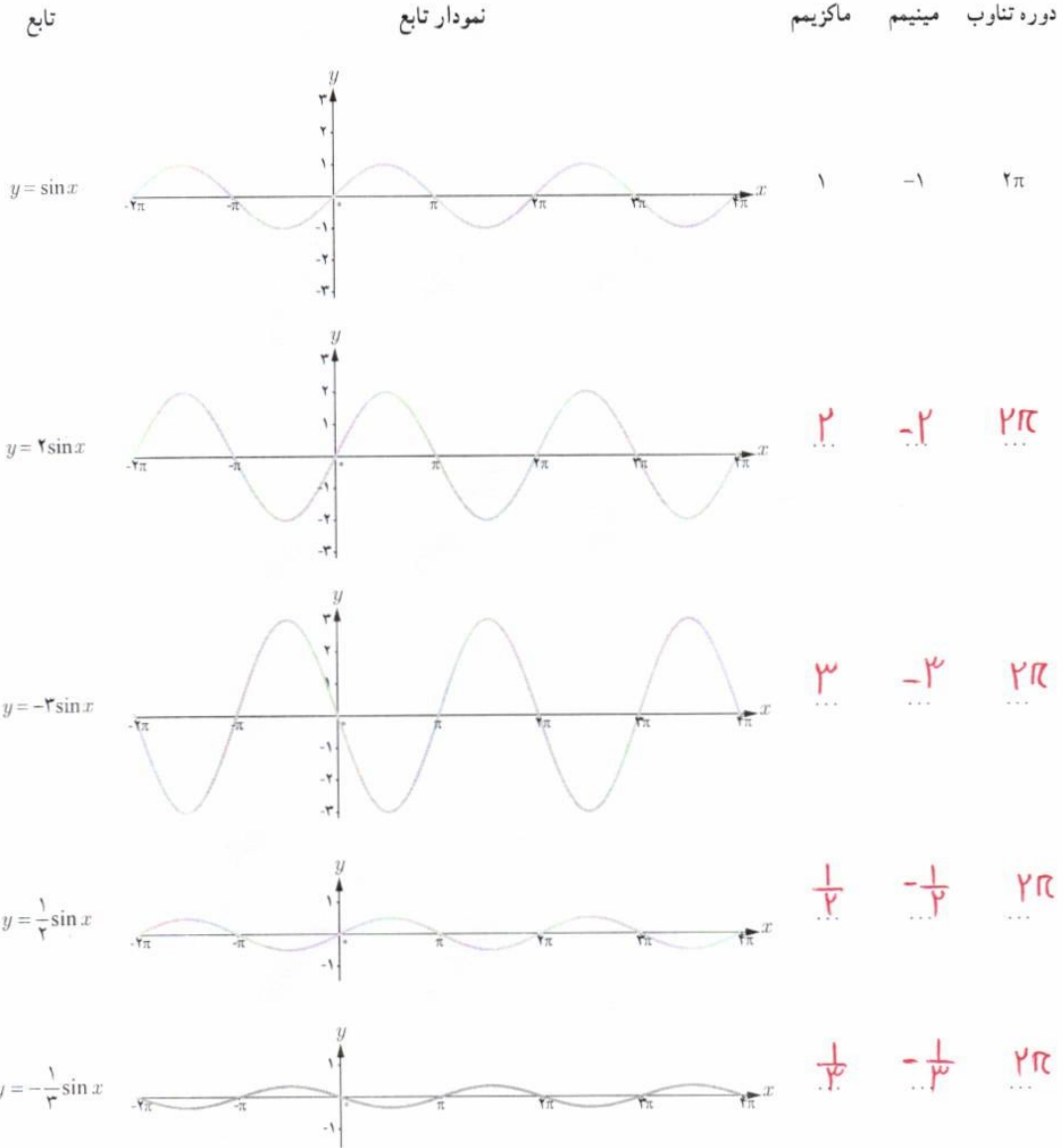
با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع تناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف: تابع f را تناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود

باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ ($f(x) = \cos x$) برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب 1 و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.



با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

$y = a \sin x \begin{cases} a > 0 \rightarrow \max = a, \min = -a \\ a < 0 \rightarrow \max = -a, \min = a \end{cases} \Rightarrow \max = |a|, \min = -|a|, T = 2\pi$

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

بین $\left. \begin{array}{l} \text{میدانیم در این معادلات} \\ \text{نمودار تابع به اندازه } c \text{ واحد} \\ \text{در راستای محور } y \text{ ها بالا یا پایین می رود} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دری مقدار } c \text{ تأثیر می گذارد} \Rightarrow \max = |a| + c, \min = -|a| + c, T = 2\pi$

$y = a \cos x \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \max = a(1) = a, \min = a(-1) = -a \\ a < 0 \Rightarrow \max = a(-1) = -a, \min = a(1) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max = |a| \\ \min = -|a| \end{cases} T = 2\pi$

$y = a \sin x + c \rightarrow \max = |a| + c, \min = -|a| + c$

تغییرات

با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم
$y = \sin x$		2π	-1	1
$y = \sin 2x$		π	-1	1
$y = \sin(-2x)$		$\frac{2\pi}{2}$	-1	1
$y = \sin \frac{x}{2}$		4π	-1	1
$y = \sin(-\frac{x}{3})$		6π	-1	1

$y = \sin bx \Rightarrow \max = 1, \min = -1$, $\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{b}$ (برای $b > 0$)
 $\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{-b}$ (برای $b < 0$)

با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx + c$ و $y = \cos bx$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

$y = \sin bx + c \Rightarrow \text{مقدار } c \text{ همانطور که قبلاً گفته شد روی } y \text{ تأثیر می گذارد} \Rightarrow \max = 1 + c, \min = -1 + c$
 $\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|b|}$

$y = \cos bx \Rightarrow \max = 1, \min = -1$, $\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{b}$ (برای $b > 0$)
 $T = \frac{2\pi}{-b}$ (برای $b < 0$)
 $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$

$y = \cos bx + c \Rightarrow \max = 1 + c, \min = -1 + c$, $\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|b|}$

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضرب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضرب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$

و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.
مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

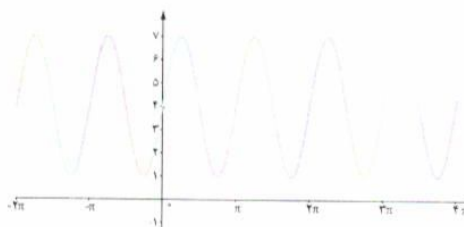
الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

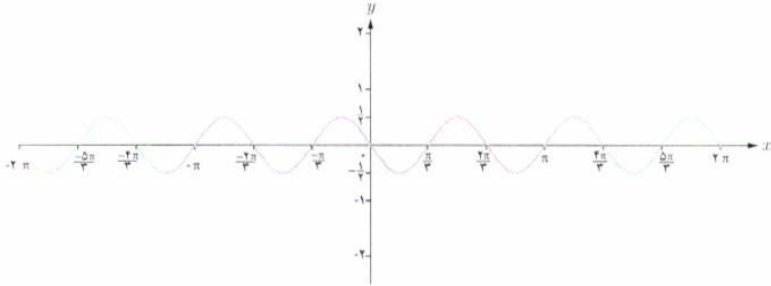
ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

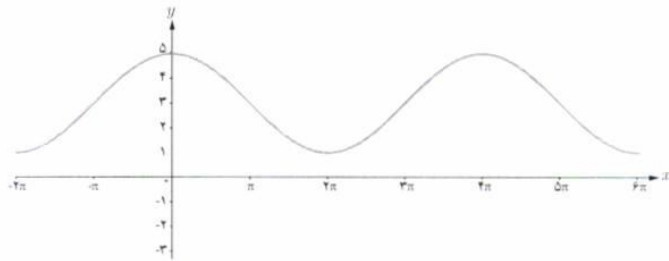
ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.

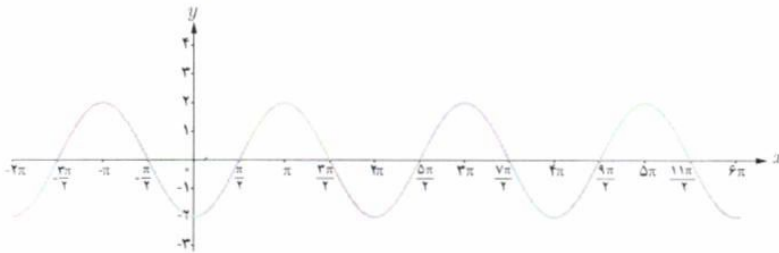




(ب)



(پ)



(ت)

حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و

طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است :

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{3} \sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|a| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2 \cos x$

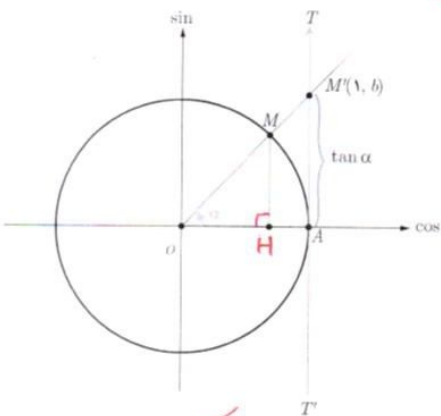
تانزانت

$\Delta OMH \sim \Delta OMA$ \Rightarrow $\frac{MH}{MA} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{MA}{OA} = b$

نسبت سیاه $\frac{MH}{MA} = \frac{OH}{OA}$ \Rightarrow $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{MA}{OA} = b$

وتر مثلث $\frac{MH}{OH} = \frac{MA}{OA} = 1$

$\sin \alpha = MH$
 $\cos \alpha = OH$



در دایره مثلثاتی رویه رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می گیریم و پاره خط OM را امتداد می دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$\tan \alpha = AM' = b$

می توان دید که تانزانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می شود. بنابراین خط TAT' را محور تانزانت می نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

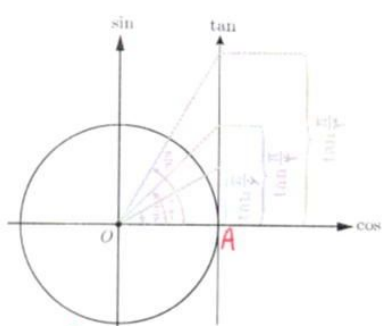
ب) چرا تانزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟ **چرا امتداد ضلع دوم زاویه در بالا قطع می کند.**

پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید. **چون در ربع اول و سوم ضلع دوم زاویه در بالا قطع می کند.**

باتوجه به شکل آنها زاویه های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ روی محور \sin قرار دارند این محور با محور تانزانت موازی است پس همواره با قطع نمی کنند. **خیر**

همیشه تانزانت با عددی بر روی محور باشد. **خیر**

تغییرات تانزانت



با تغییر زاویه α مقادیر تانزانت آن نیز تغییر می کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانزانت تا چه حد افزایش می یابد؟ **بسیار بزرگ می شود (+∞)**

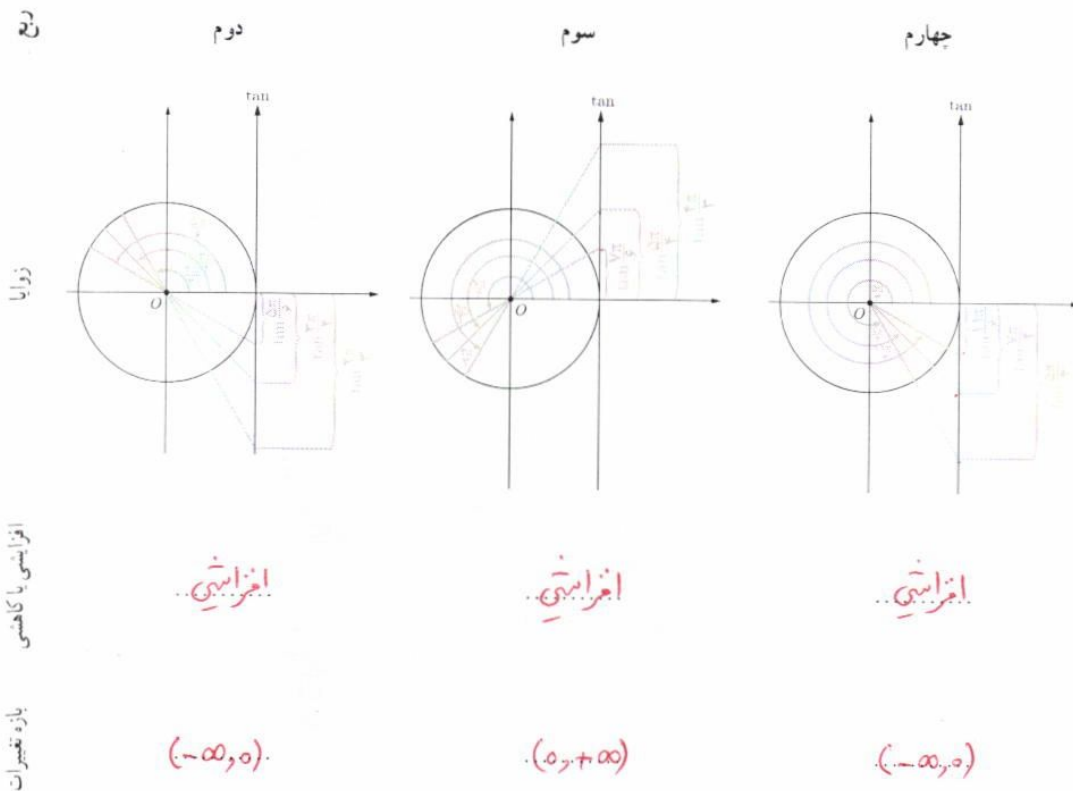
ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می توان زاویه ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

ابتدا عدد حقیقی مثبت a که قساطر با تقاطع روی محور است، را روی محور TAT' مشخص می کنیم پس از آن نقطه M مبدأ محتمات (نقطه O) وصل می کنیم. محل تقاطع آن با دایره مثلثاتی، نقطه انتهایی زاویه α است (M) که ضلع ابتدایی آن OA می باشد. لذا زاویه α تانزانت آن برابر a می شود.

$\tan(\widehat{AOM}) = \tan \alpha = a$

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهش؟
 ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.



توجه کننده:

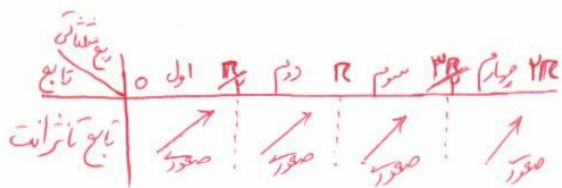
گروه ریاضی، مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	π $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$ 2π
$\downarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \uparrow \dots \uparrow \sqrt{3} \uparrow$	$\downarrow \sqrt{3} \uparrow \dots \uparrow \frac{\sqrt{3}}{3} \uparrow$	$\downarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \uparrow \dots \uparrow \sqrt{3} \uparrow$	$\downarrow \sqrt{3} \uparrow \dots \uparrow \frac{\sqrt{3}}{3} \uparrow$
	نامعین	نامعین	

تابع تنازات

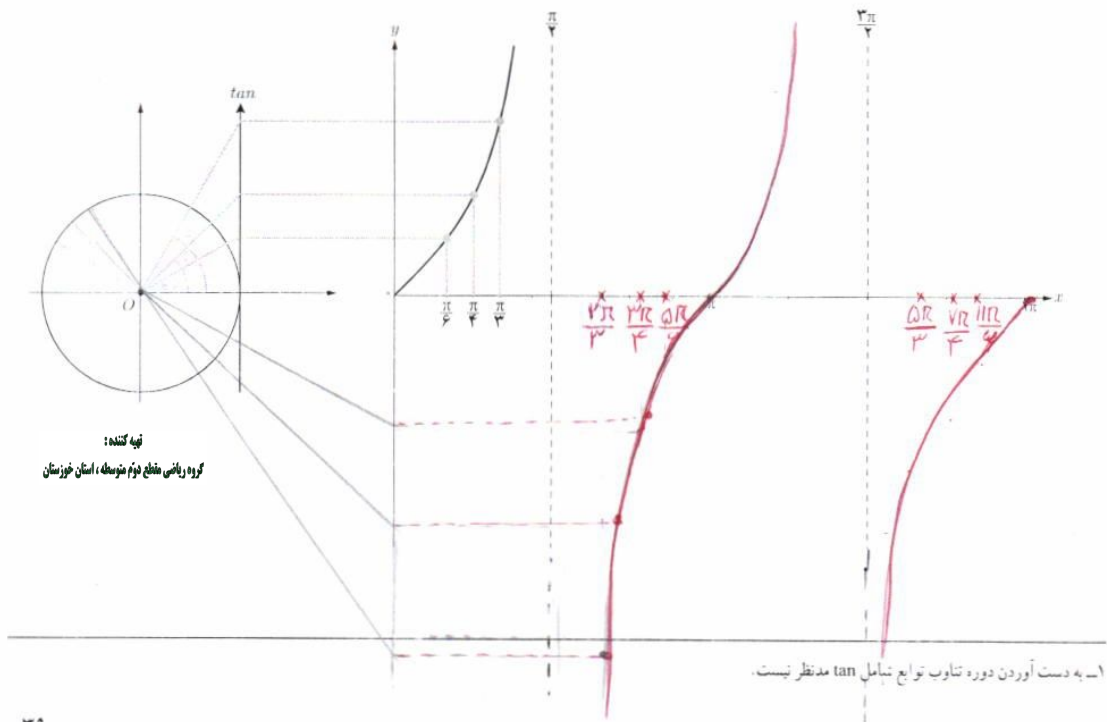
همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$


صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan \alpha$

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin \sqrt{x} \rightarrow \text{Max} = 2+1=3, \text{Min} = -2+1=-1, T = \frac{2R}{\sqrt{x}}$

ب) $y = \sqrt{x} - \cos \frac{\pi}{\sqrt{x}} x \rightarrow \text{Max} = \sqrt{x}+1, \text{Min} = \sqrt{x}-1, T = \sqrt{x}$

پ) $y = -\pi \sin(\frac{x}{\sqrt{x}}) - 2 \rightarrow \text{Max} = R-2, \text{Min} = -R-2, T = \sqrt{x}R$

ت) $y = -\frac{\sqrt{x}}{4} \cos \sqrt{x} \rightarrow \text{Max} = \frac{\sqrt{x}}{4}, \text{Min} = -\frac{\sqrt{x}}{4}, T = \frac{2R}{\sqrt{x}}$

هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

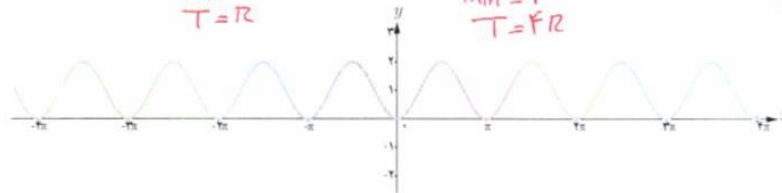
ت) $y = 1 - \cos 2x$
 $\text{Max} = 2$
 $\text{Min} = 0$
 $T = R$

ب) $y = \sin 2x$
 $\text{Max} = 1$
 $\text{Min} = -1$
 $T = R$

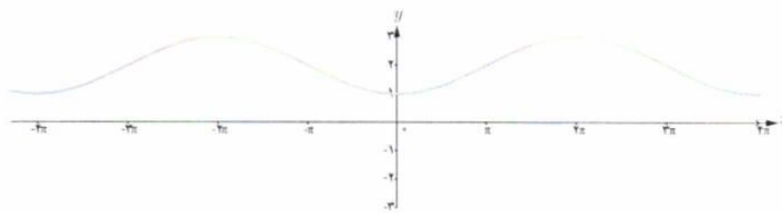
ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$
 $\text{Max} = 3$
 $\text{Min} = 1$
 $T = 4R$

الف) $y = \sin \pi x$
 $\text{Max} = 1$
 $\text{Min} = -1$
 $T = \frac{1}{2}R$

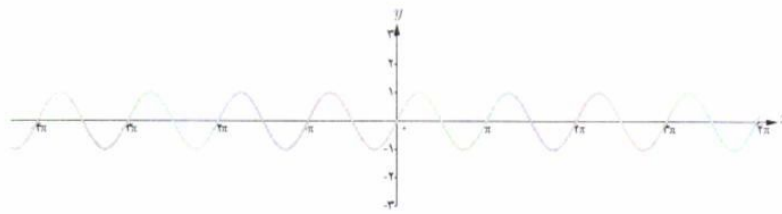
۱) $y = 1 - \cos 2x$



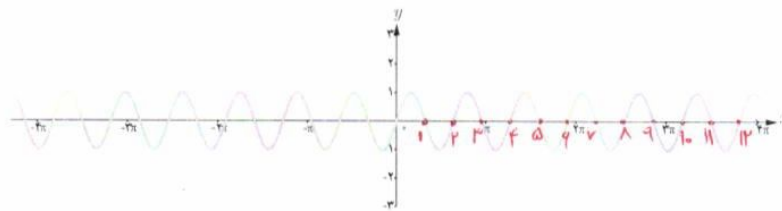
۲) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$



۳) $y = \sin 2x$



۴) $y = \sin \pi x$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$y = \pm \sin(\pm fx)$
 $y = \pm \sin(fx)$
 $y = \pm \cos(\pm fx) \Rightarrow y = \pm \cos(fx)$

درس اول تناوب و تنازات

(ب) $y = \pm 3 \sin(\pm \frac{1}{4}x) - 4$
 $y = \pm 3 \sin(\frac{1}{4}x) - 4$
 $y = \pm 3 \cos(\pm \frac{1}{4}x) - 4$
 $y = \pm 3 \cos(\frac{1}{4}x) - 4$

(ب) $y = \pm 3 \sin(\pm \frac{1}{4}x) + 4$
 $y = \pm 3 \sin(\frac{1}{4}x) + 4$
 $y = \pm 3 \cos(\pm \frac{1}{4}x) + 4$
 $y = \pm 3 \cos(\frac{1}{4}x) + 4$

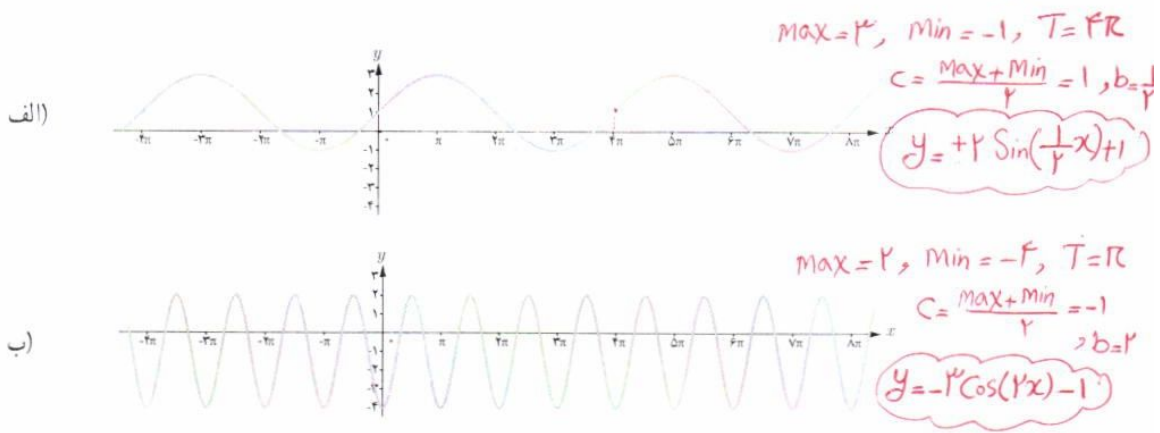
در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

بهتر است برای سوال قید می شد که معادله سینوسی مورد نظر است یا کسینوسی

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0, a = \pm 3, b = \pm 1 \Rightarrow y = \begin{cases} \pm 3 \sin(\pm x) \\ \pm 3 \sin(2x) \\ \pm 3 \cos(\pm 2x) \\ \pm 3 \cos(x) \end{cases}$
 ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 4, a = \pm 3, b = \pm \frac{1}{3}$
 ب) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = -4, a = \pm 3, b = \pm \frac{1}{4}$
 ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0, a = \pm 1, b = \pm 2$

قید یک جواب کافی است.

ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- الف) تابع تنازات در دامنه اش صعودی است. **نادرست**
 ب) می توان بازه ای یافت که تابع تنازات در آن نزولی باشد. **درست**
 پ) می توان بازه ای یافت که تابع تنازات در آن غیر صعودی باشد. **نادرست**
 ت) تابع تنازات در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **نادرست**

با توجه به محورهای سینوس و تنازات، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

$\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ (ب)

ربع دوم: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
 ربع چهارم: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

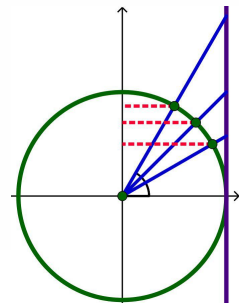
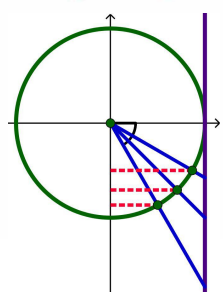
زاویه	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	2π
Sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	1	1	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

توجه کننده: گروه ریاضی مقطع نهم متوسطه، استان خوزستان

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

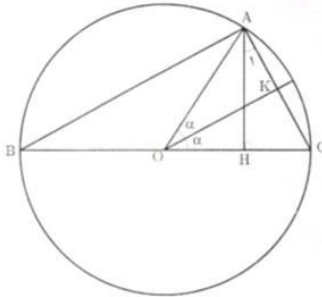
ربع اول: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

زاویه	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+$



نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایای مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایای به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن^۱.



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O

برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha \quad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به \widehat{AC} است، لذا نصف آن

است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A} = 90^\circ$ و لذا BC قطر است و لذا:

همچنین از مجموع زوایای \hat{ABC} به دست می‌آید:

$$\hat{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در \hat{AHC} داریم:

$$\hat{AHC}: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در \hat{OAC} و \hat{AHC} به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{OAC}: AH = \sin 2\alpha \\ \hat{AHC}: \cos \hat{A}_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در \hat{OAH} داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در \hat{AHC} داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

^۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

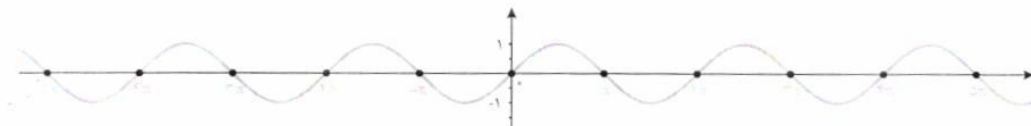
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

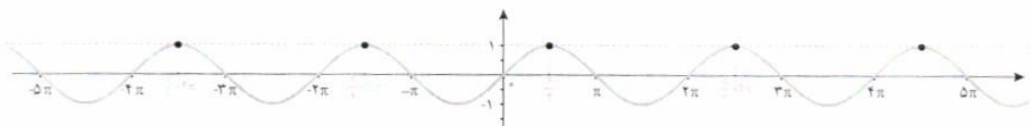
مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{5\pi}{4} - 2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

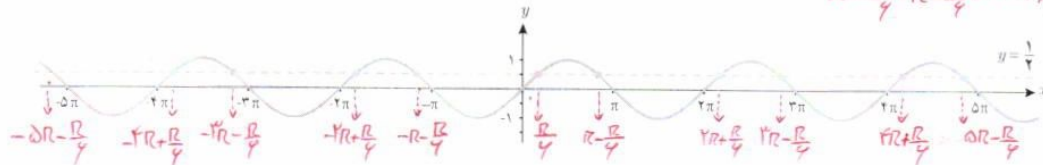
اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید. \leftarrow
 $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$

خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟

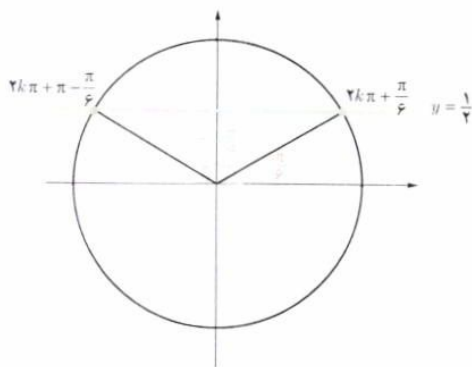
$$x = \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, \dots$$



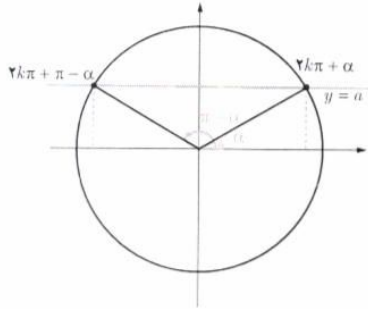
طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید.

آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ بی‌شمار جواب دارد.
 $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \checkmark$
 $x = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \checkmark$
 $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} \checkmark$
 $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \checkmark$

در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم‌انتهای با $\frac{\pi}{6}$: $2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$
 هم‌انتهای با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \pi - \frac{5\pi}{6}$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{4}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



توجه کننده:

گروه ریاضی منطقه خرم‌موسه، استان خوزستان

ب) $4 \sin x + \sqrt{3} = 0$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-2\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

را بیابید.

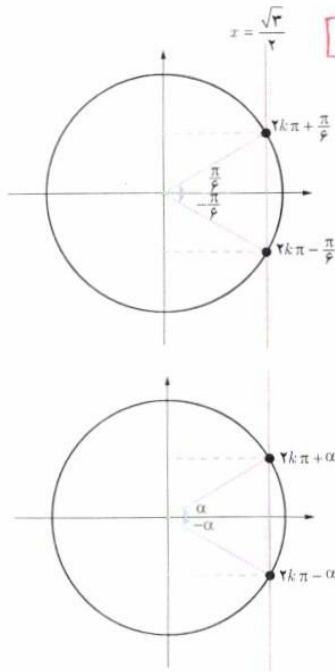


$\begin{cases} k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

با توجه به دایره مثلثاتی، زاویه هم آنها با $\frac{\pi}{4}$... $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots$ \leftarrow $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots$ \leftarrow $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots$

با توجه به دایره مثلثاتی، زاویه هم آنها با $-\frac{\pi}{4}$... $-\frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, \dots$ \leftarrow $-\frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, \dots$ \leftarrow $-\frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, \dots$

فصل ۲ مثلثات



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی رویه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.

بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی رویه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

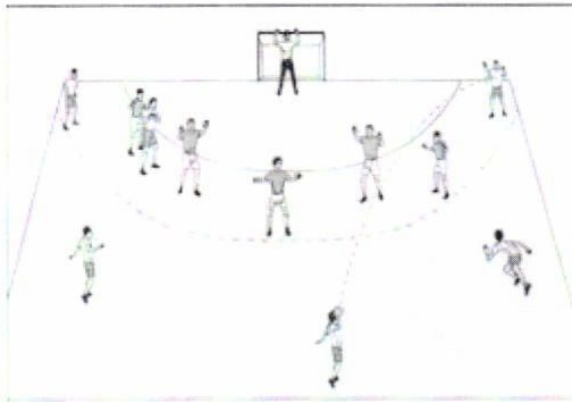
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

از رابطه داده شده به دست می آید:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{9.8} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 9.8}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.

مثال: جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2(22.5^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2(22.5^\circ) \Rightarrow \sin^2(22.5^\circ) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\alpha=22.5^\circ} \sin(22.5^\circ) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = 2 \times \sin(22.5^\circ) \times \cos(22.5^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \cos(22.5^\circ) \Rightarrow \cos(22.5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

فصل ۲ مثلثات

مثال: معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = 5$ و $t = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده

$\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست

می آوریم. *نظرات مقارن کسینوس همواره بین $-1 < \cos x < +1$ قرار دارند.*

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

فرض کنید α و $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sin 2\alpha = 2\cos \alpha \sin \alpha = 2 \times \frac{5}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$

ب) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$

نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه 22.5° به دست آورید.

نرم: $45^\circ = 2\alpha \Leftrightarrow 22.5^\circ = \alpha \Leftrightarrow 2(22.5^\circ) = 45^\circ$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

ب) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 $x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

مثلی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این

خاصیت ها می توان ساخت؟
 $S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \text{ یا } \theta = 150^\circ$
 پس دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

الف) $\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}, k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$
 $\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

ب) $2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$
 $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

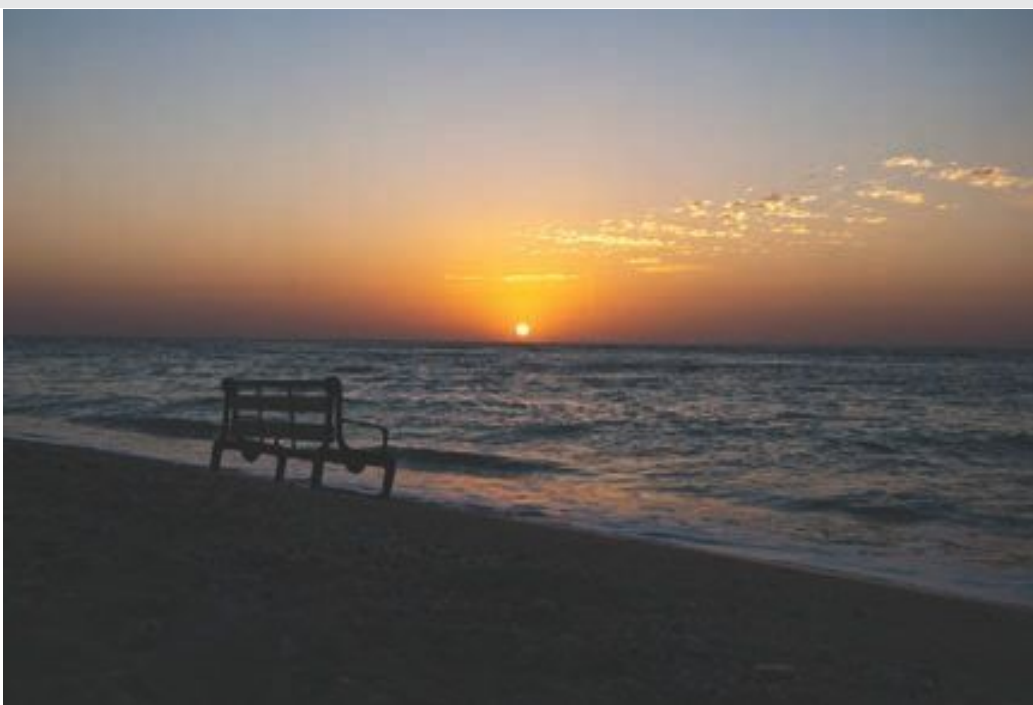
ن) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm 1}{2}$
 $\sin x = \frac{3}{4}$ غیر ممکن، $\sin x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کننده:

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

۳

فصل



عکاس: سیدمهدی حسینی

جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهده دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهده طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

حد بی نهایت

درس اول

حد در بی نهایت

درس دوم

درس اول

حد بی‌نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x - a)$:

فعالیت

الف) چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - 3)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-(2x^2 - 6x)} \\ 6x + 1 \\ \underline{-(6x - 18)} \\ 19 \end{array}$$

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = 4$.

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید

ت) $f(3)$ و R چه رابطه‌ای با هم دارند؟ **برابرند**

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید:

$$2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + 1) + 4$$

الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد:

$$\frac{f(x)}{x - a} = Q(x) + \frac{R}{x - a}$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت:

$$f(a) = \underbrace{(a - a)}_0 Q(a) + R \Rightarrow f(a) = R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که:

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجه حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

۱ در چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \quad \quad \quad 3x + 4 \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline R = 0 \end{array}$$

نهیة کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

بنابر رابطه تقسیم داریم: $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+4)$. همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$g(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$$

۲ چندجمله‌ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x + 1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \quad \quad \quad 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline x + 1 \\ -(x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$g(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$ بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش پذیر است.

$$x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 1 = -16 + 20 + 6 - 1 = 0 \Rightarrow R = 0$$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq 0$ ، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

مثال ۱:

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ برابر است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-1)$ بخش پذیرند. این عامل را به کمک

تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

۱- در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجه صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی یا فرجه حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین توابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x+2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x+2 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -x^2 + 4 \\ -(-x^2 - 2x) \\ \hline x + 4 \\ -(x + 2) \\ \hline 2 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می‌توان نوشت $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x+2)(2x^2 - x + 2) + 2$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{2 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکره: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و در این حالت برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال: حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x = 5$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه 5 برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2 + \sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

مثال: حد تابع $h(x) = \frac{x^3 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x = 8$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x = 8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^3 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 8(4+4+4) = 96$$

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 + 3x + 2}$

$\frac{+1-1}{-1+\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x + \sqrt{2x+3}} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x - \sqrt{2x+3}}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x - \sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{A}{(x+1)(x-3)}$
 $= \frac{(-2)(-1-\sqrt{1})}{(-1-3)} = \frac{4}{-4} = -1$

صورت و مخرج منفی شود $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$

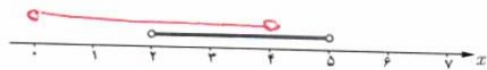
$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(3)(2)} = \frac{1}{6}$

حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقادارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

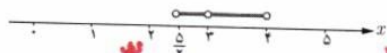
همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x را یک همسایگی x می نامیم. به عبارت دیگر اگر $x \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x می باشد.

مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(0, 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x باشد، آنگاه مجموعه $\{x\} - (a, b)$ یک همسایگی محذوف x نامیده می شود.

$\frac{-1+1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$



مثال: مجموعه $(\frac{5}{3}, 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x+2)} \times \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x^2} - \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x+1})}$
 $= \frac{1}{(1)(1+1)} = \frac{1}{2}$

حل کار در کلاس ۵۲/۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \Rightarrow \frac{9 - 9}{9 - 9} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ حاصل صفر و مخرج صفر می شود

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 5(\frac{1}{2}) + 1}{2(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 2 + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(4x - 2)}{(2x - 1)(2x + 2)} = \frac{4(\frac{1}{2}) - 2}{2(\frac{1}{2}) + 2} = \frac{0}{2} = 0$

$\begin{array}{r} 4x^2 - 5x + 1 \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline -2x + 1 \\ -(-2x + 1) \\ \hline \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} x - \frac{1}{2} \\ \hline 2x - 1 \\ \hline \dots \end{array}$
--	---

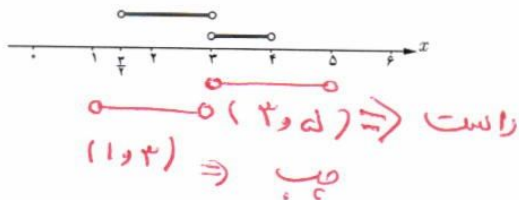
ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 4}{2x^2 - 13x^2 + 25x - 9} \Rightarrow \frac{9 - 18 + 4}{2 \cdot 9 - 11 \cdot 9 + 25 \cdot 3 - 9} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x^2 - 7x + 3)} = \frac{3-2}{18 - 15 + 3} = \frac{1}{6}$$

$\begin{array}{r} 2x^2 - 13x^2 + 25x - 9 \\ -(2x^2 - 4x^2) \\ \hline -9x^2 + 25x - 9 \\ -(-9x^2 + 27x) \\ \hline -2x - 9 \\ -(-2x - 6) \\ \hline \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 3 \\ \hline 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline \dots \end{array}$
---	--

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x, x+r)$ یک همسایگی راست x نامیده می‌شود. همچنین، $(x-r, x)$ را یک همسایگی چپ x می‌نامیم.

مثال: بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست 3 و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ 3 است. شما یک همسایگی راست دیگر برای 3 و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

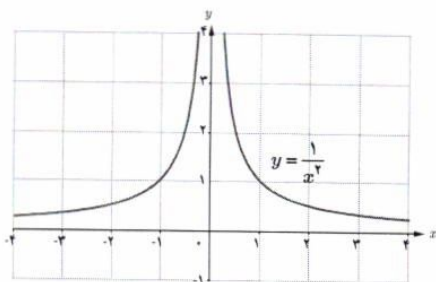


فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	$-0/2$	$-0/1$	$-0/0.1$	$-0/0.001$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$0/0.001$	$0/0.1$	$0/1$	$0/2$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	25	100	10000	1000000	$\rightarrow ? \leftarrow$	1000000	10000	100	25

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$ ، به هر اندازه دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ



نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقادیر بزرگ شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

تذکر: همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱- رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

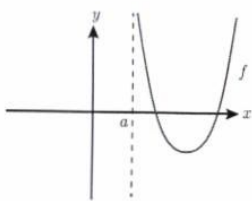
رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

تعریف ۲: فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواه کوچکتر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

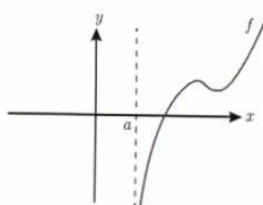
حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

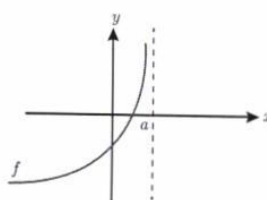
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



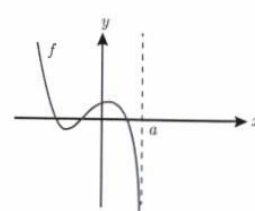
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



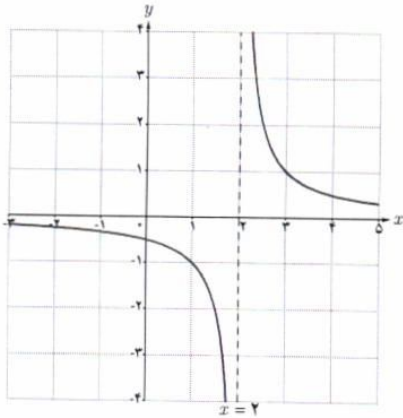
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



مثال: حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.
 حل: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود. بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.
 به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت:

(الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه قبل، برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل: مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است. پس بنا بر قسمت (پ) قضیه قبل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

۱- در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $\infty \times \infty$ و $\infty - \infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x)}{x^2 - 5} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ | ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[-\frac{1}{x^2}]}{|\frac{1}{x^2} + 1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
 ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

کار در کلاس

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

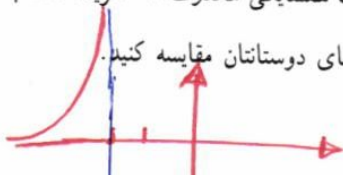
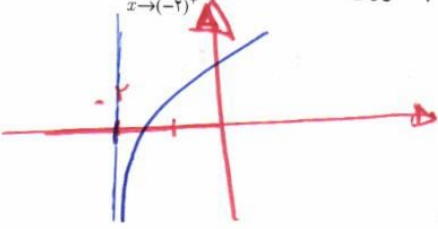
۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

$\Rightarrow \frac{2(5)}{5^+ - 5} = \frac{10}{0^+} = +\infty$

$= \frac{2}{|3-3|} = \frac{2}{0} = +\infty$

$= \frac{0+1}{\sin^2 0} = \frac{1}{0} = +\infty$

۲) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -2 تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$.



تصویر

۱) الف) نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $x+1$ بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۳) حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$

۴) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9} = \frac{1-15}{9-9} = \frac{-14}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0} = +\infty$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

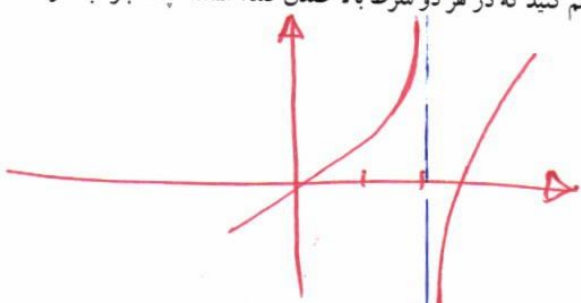
ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۵) الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟



$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow R=0$$

تمرین ۱

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline x + 1 \\ x + 1 \\ \hline \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x+1 \\ 2x^2 - 2x + 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline x + 1 \\ x + 1 \\ \hline \dots \end{array}$$

تمرین ۲
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}}{4(\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(2x)}{(x - \frac{1}{2})(4x + 2)} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

۲
$$\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{12\Delta - 100 - 20 - \Delta}{2\Delta - 2\Delta} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{(x - \Delta)(x^2 + x - 1)}{(x - \Delta)(x + \Delta)} = \frac{2\Delta + \Delta - 1}{\Delta + \Delta} = \frac{29}{10}$$

ب)
$$\frac{14 - 12 - 4}{-44 + 44 - 4 + 4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \frac{-5}{17}$$

از روش‌ها تقسیم یا هدرت می‌توان استفاده کرد

۱)
$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x(x-1)} \times \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x + \sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x-1)(x + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x + \sqrt{2x-1})} = \frac{0}{1(1+1)} = 0$$

ب)
$$\frac{9-9}{2-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-x-1}$$

$$= \frac{4(4)}{-1} = -24$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب) } \frac{-14+14}{-2+2} = \frac{0}{0} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{\sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{x^2-2\sqrt{x}+4}}{\sqrt{x^2-2\sqrt{x}+4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(\sqrt{x^2-2\sqrt{x}+4})}{(x+1)} = \frac{2(4-2+4)}{1} = 8
 \end{aligned}$$

$$\text{۶) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\text{۷) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\text{۸) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[4^-]-3}{4^- - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

الف) یعنی حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کمتر از a به عدد a نزدیک می‌شود، از هر عدد مثبتی (مستدلخواه) بزرگتر می‌شود.

ب) حد تابع f وقتی که x از مقادیر بزرگتر از a به عدد a نزدیک می‌شود، از هر عدد منفی دلخواه، کوچکتر می‌شود.

درس دوم

حد در بی نهایت

حد در بی نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$	$\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$...

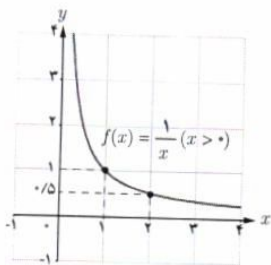
$$1 - \frac{1}{2^{16}} = 1 - \frac{1}{65536} = \frac{1027}{1028}$$

$$1 - \frac{1}{2^n}$$

الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می‌توان گفت؟



مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\rightarrow ?$

از جدول دیده می شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از 0.00001 باشد، لازم است x بزرگ تر از 100000 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از 0.000001 باشد؟
با این شرایط می گوئیم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. به طور کلی می توان گفت:

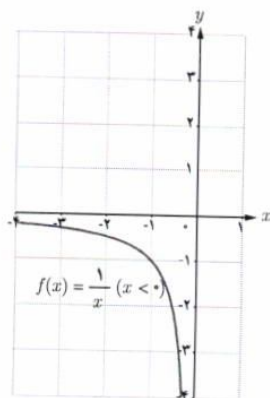
اگر تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می شود که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	$-\infty \leftarrow$	\dots	-1000000	-100000	-10000	-1000
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	\dots	-0.0000001	-0.000001	-0.00001	-0.0001



نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\text{پ) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{3m}{n} \right)} = \frac{1}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

فصل ۳ | حد بی نهایت و حد در بی نهایت

در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$. در این صورت:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0)$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{\sqrt{1 - 0 + 0}}{3 + 0 - 0} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3n+2}{n-1} &= \frac{\lim_{n \rightarrow -\infty} (3n+2)}{\lim_{n \rightarrow -\infty} (n-1)} \\ &= \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3 \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1}$$

$$\text{ب) } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$$

۲) الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد. پاسخ خود را با جواب های دوستانتان مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} \text{پ) } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t} &= \frac{\lim_{t \rightarrow -\infty} (1-5t^2)}{\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2+3t)} \\ &= \frac{0-5}{1+0} = -5 \end{aligned}$$

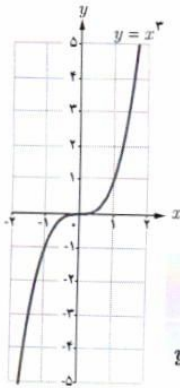
$$\text{الف) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n+1}{n+2} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{100n^2 - 2n}{n^2} = 100$$

۶۰

حد نامتناهی در بی نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می دهیم.
 مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$y = x^3$	$-\infty \leftarrow$	-1000000000	-100000000	-10000000	10000000	1000000000	1000000000000	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهند که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

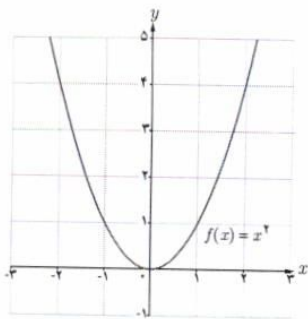
تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

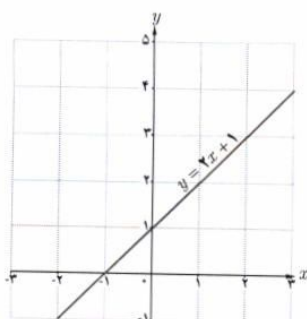
تذکر ۱: رابطه های $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شوند.
 تذکر ۲: رابطه هایی مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی نهایت می نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



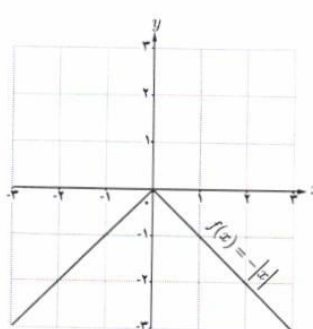
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



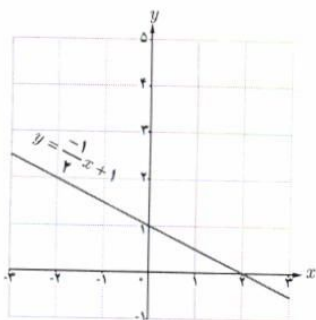
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$



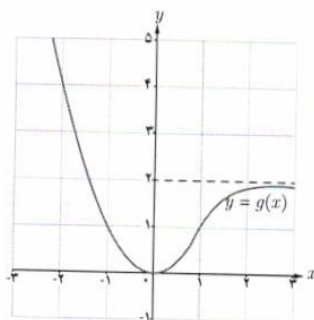
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



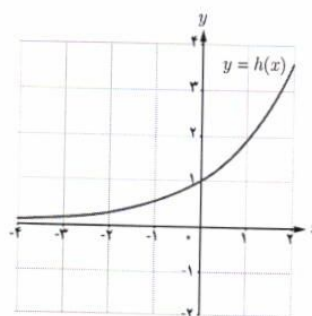
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{+\infty} = 0$

تمرین

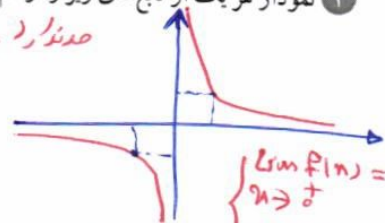
1) نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm \infty$ (صندل)

ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$



۶۳

الف) $\lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) = -1$

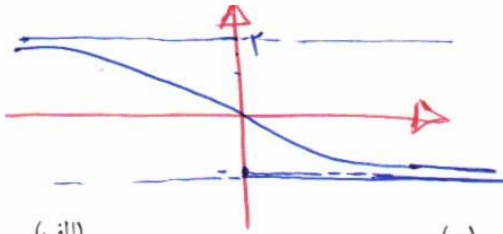
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = -2(+\infty) = -\infty$



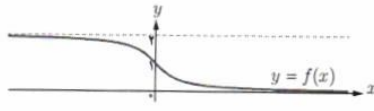
رسم مکرر ۵

فصل ۳ | حد بی نهایت و حد در بی نهایت

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



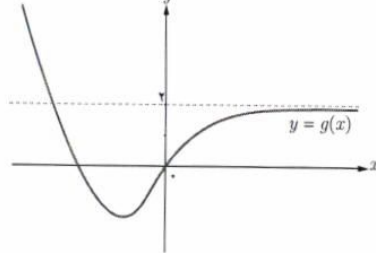
(الف)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

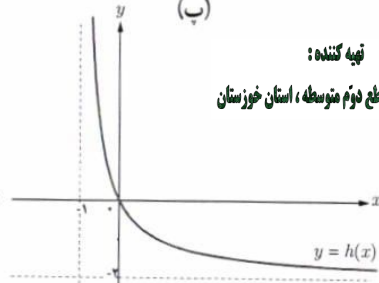
(ب)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

(پ)



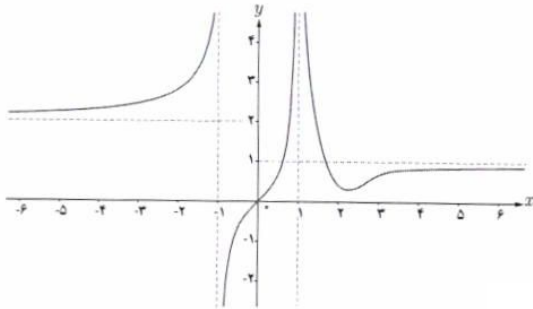
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = +\infty$$

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{1}{x}) = 9 + 0 = 9$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}n^3) = -(+\infty) = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{-\infty} = 0$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$

ح) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^7 - 5x + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5}{n^7} = 0$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$

خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-6n^3}{2n^3} = -3$

ز) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{4} = \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۶۴ (الف) $f(x)$ به اندازه‌ی دلخواه می‌توان به ۱- نزدیک کرد، سرتوب به

انفیل به اندازه کافی بزرگ اختیار نمود.

(ب) $f(x)$ را به اندازه‌ی کافی می‌توان به عدد ۲ نزدیک کرد، سرتوب به انفیل به قدر کافی کوچک و منفی اختیار نمود.



ماهواره طلوع



ماهواره امید



ماهواره صدا



ماهواره بر سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

آشنایی با مفهوم مشتق

درس اول

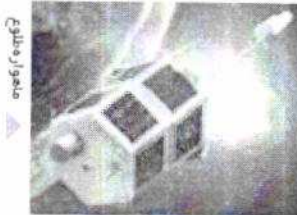
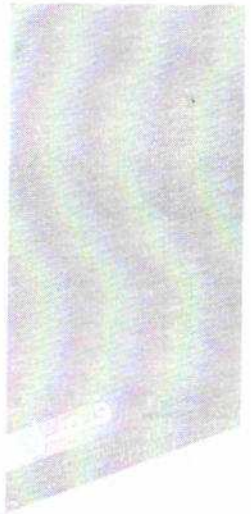
مشتق پذیری و پیوستگی

درس دوم

آهنگ تغییر

درس سوم

مشق



ماهور در سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق پذیری و پیوستگی

آهنگ تغییر

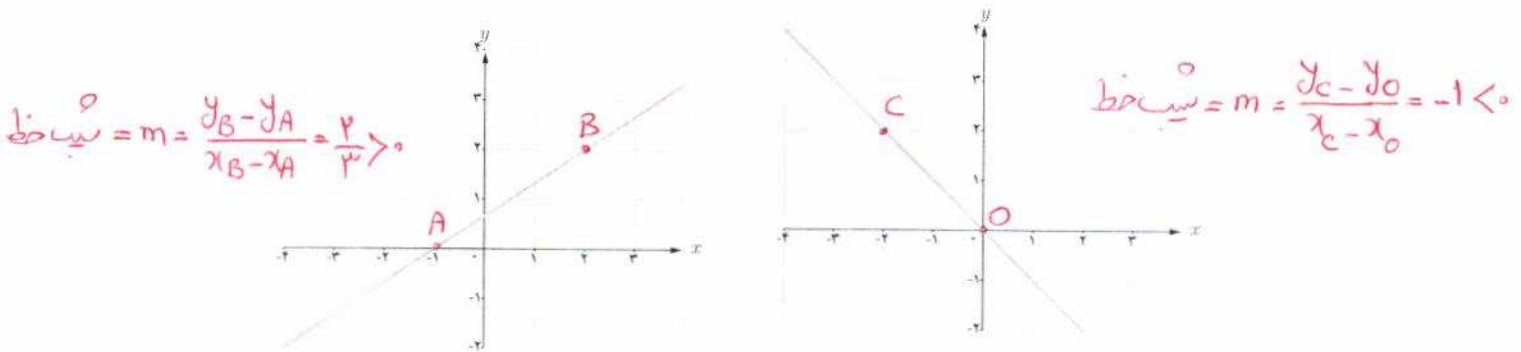


درس اول

تفاوتی با مفهوم مشتق

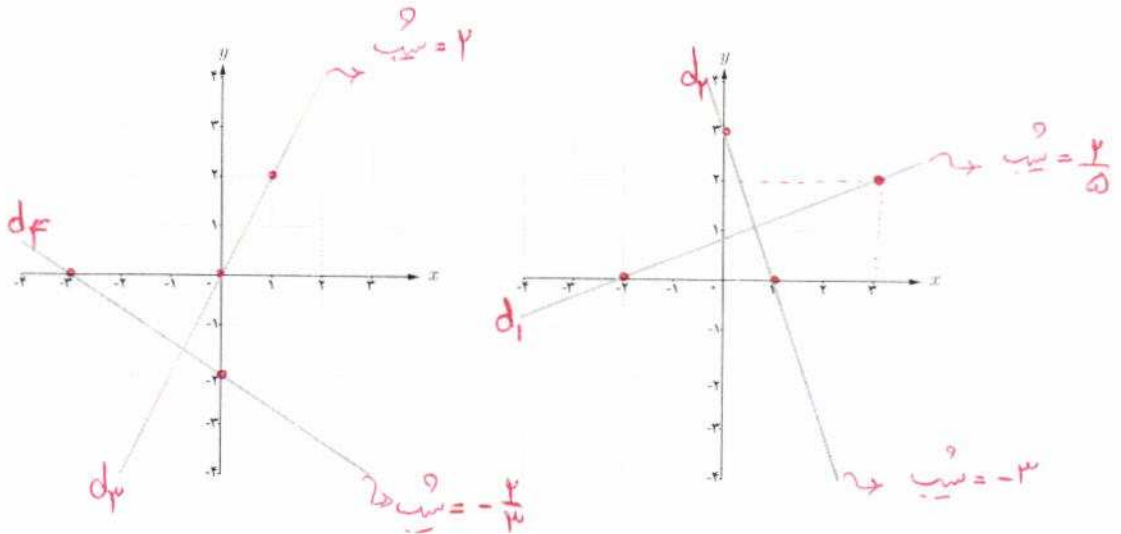
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$

با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 را روی شکل مشخص کنید.

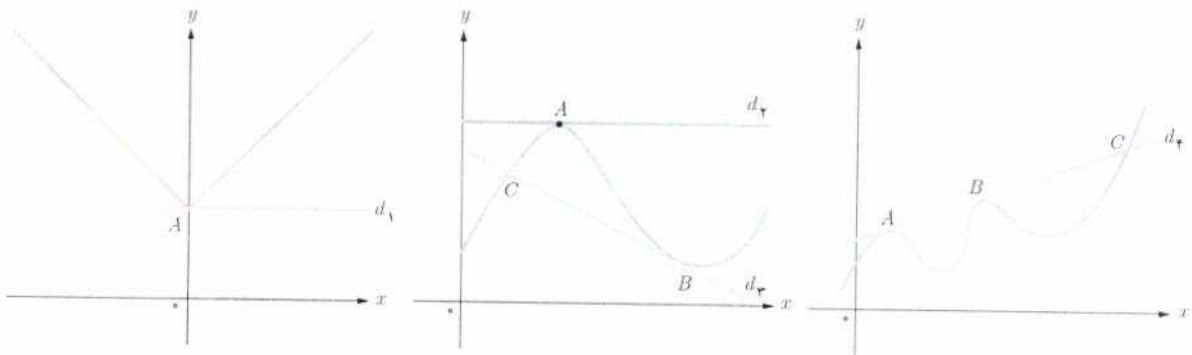




خط مماس بر یک منحنی

یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_1 در نقطه A ، خط d_2 در نقطه B و خط d_3 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_4 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_4 و d_3 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



خواندنی

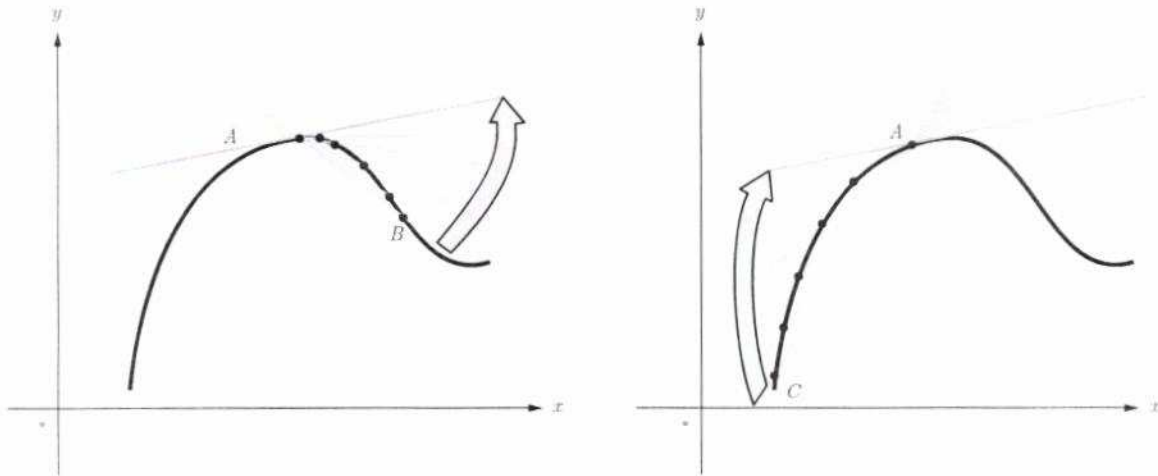
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیم‌ها و مینیم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۶۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ **خط مماس بر منحنی در نقطه A**

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف تابع $f(x) = -x^2 + 1$ داده شده است. اگر $0 \leq x \leq 1$ نقاط $E(3, f(3))$ و $D(4, f(4))$ ، $C(5, f(5))$ ، $B(6, f(6))$ ، $A(2, f(2))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

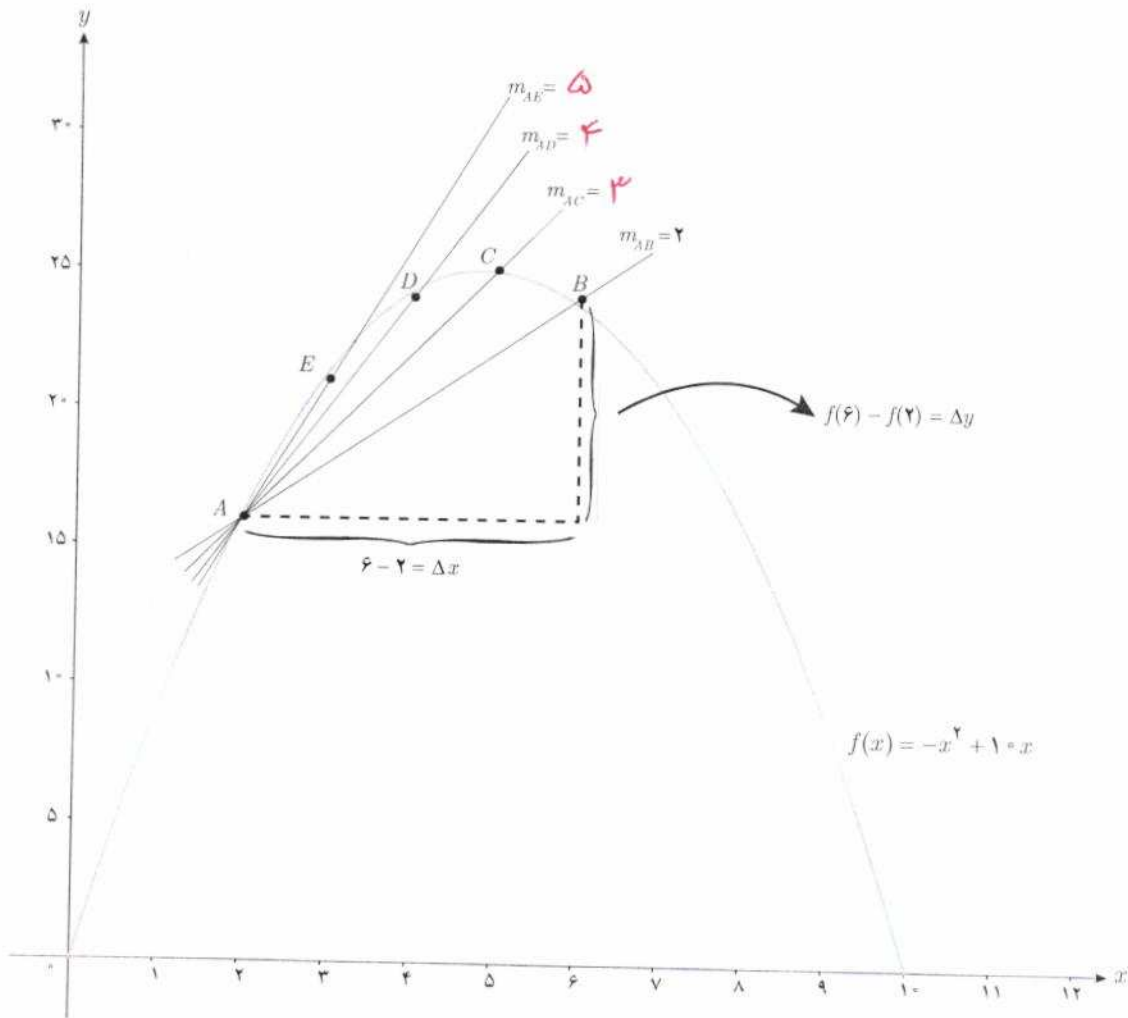
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 14}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 14}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{21 - 14}{1} = 7$$

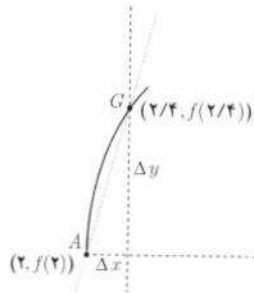
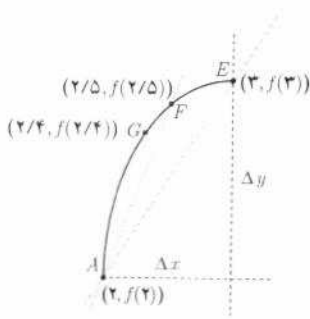


همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δx و Δy نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟ **لوحه دکورتری شوند**

$[2, 6]$	۲ ————— ۶	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 5]$	۲ ————— ۵	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	۲ ————— ۴	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	۲ ————— ۳	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2/4]$ رسم شده است.

$$m_{AF} = \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2}$$

$$= \frac{18/75 - 16}{-0.5}$$

$$= \frac{2/75}{-0.5} = 5/5$$

$$m_{AG} = \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2}$$

$$= \frac{18/24 - 16}{-0.4}$$

$$= \frac{2/24}{-0.4} = 5/4$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$ شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.

$$[2, 2/4] \quad \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{18/24 - 16}{-0.4} = \frac{2/24}{-0.4} = 5/6$$

$$[2, 2/3] \quad \frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{17/71 - 14}{-0.3} = \frac{1/71}{-0.3} = 5/7$$

$$[2, 2/2] \quad \frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/16 - 16}{-0.2} = \frac{1/16}{-0.2} = 5/8$$

$$[2, 2/1] \quad \frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/59 - 16}{-0.1} = \frac{-0.59}{-0.1} = 5/9$$

$$[2, 2/0.1] \quad \frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.599 - 16}{-0.1} = \frac{-0.599}{-0.1} = 5/99$$

$$[2, 2/0.01] \quad \frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.5999 - 16}{-0.01} = 5/999$$

$[2, 2+h]$
 یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \rightarrow ? = 2$$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است،

بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر

آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + 1 \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ ،

$[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر

در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{صفر نزدیک شود، یعنی داریم:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت:}$$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند،

یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ محاسبه شده است:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 1 \cdot (3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 + h - 21}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد: $f'(2) = 6 =$ شیب خط مماس در نقطه A

$A(2, f(2)) = (2, 16)$

$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$

شیب خط $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه ای به طول ۲- بنویسید.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h + 4 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h(-4+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-4+h) = -4$

معادله خط مماس: $y - 7 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 1$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

مثال: اگر $f'(2), f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ را از دستور بالا به دست آورید:

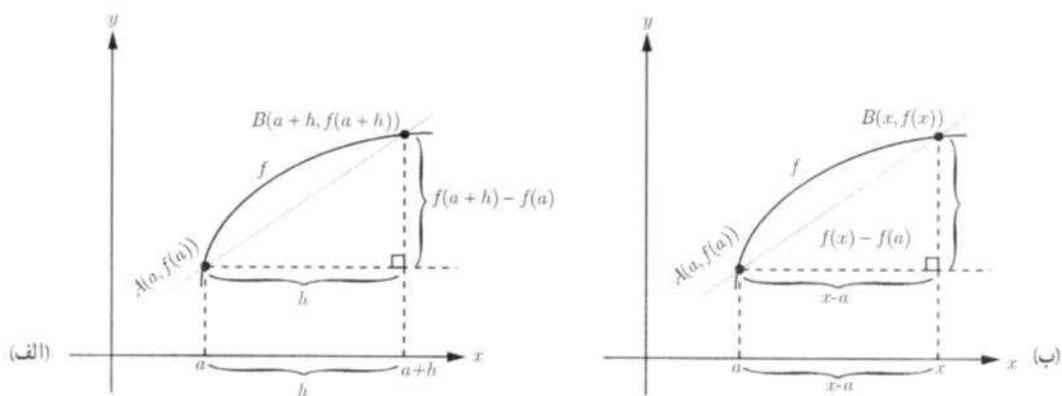
$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 \cdot (2 + \Delta x) - 16}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 + 2 + \Delta x - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 - 3\Delta x - 18}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x - 3) = -3$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.

تهیه کننده:



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت

$$\text{دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} \quad \text{روش اول:}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \quad \text{روش دوم:}$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 14}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x-2) = -4$$

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 10x - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} -(x-5) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} -(x-5) = 0$$

- الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(1)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.
 ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. نقاط F و A .
 پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.
 ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.
 ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

نقاط A, B, C, D, E, F, G روی منحنی است. اما در نقاط B, G, F, A شیب (مشتق) منفی است.

$$f'(3) > f'(4) \quad \text{یا} \quad m_E > m_D$$

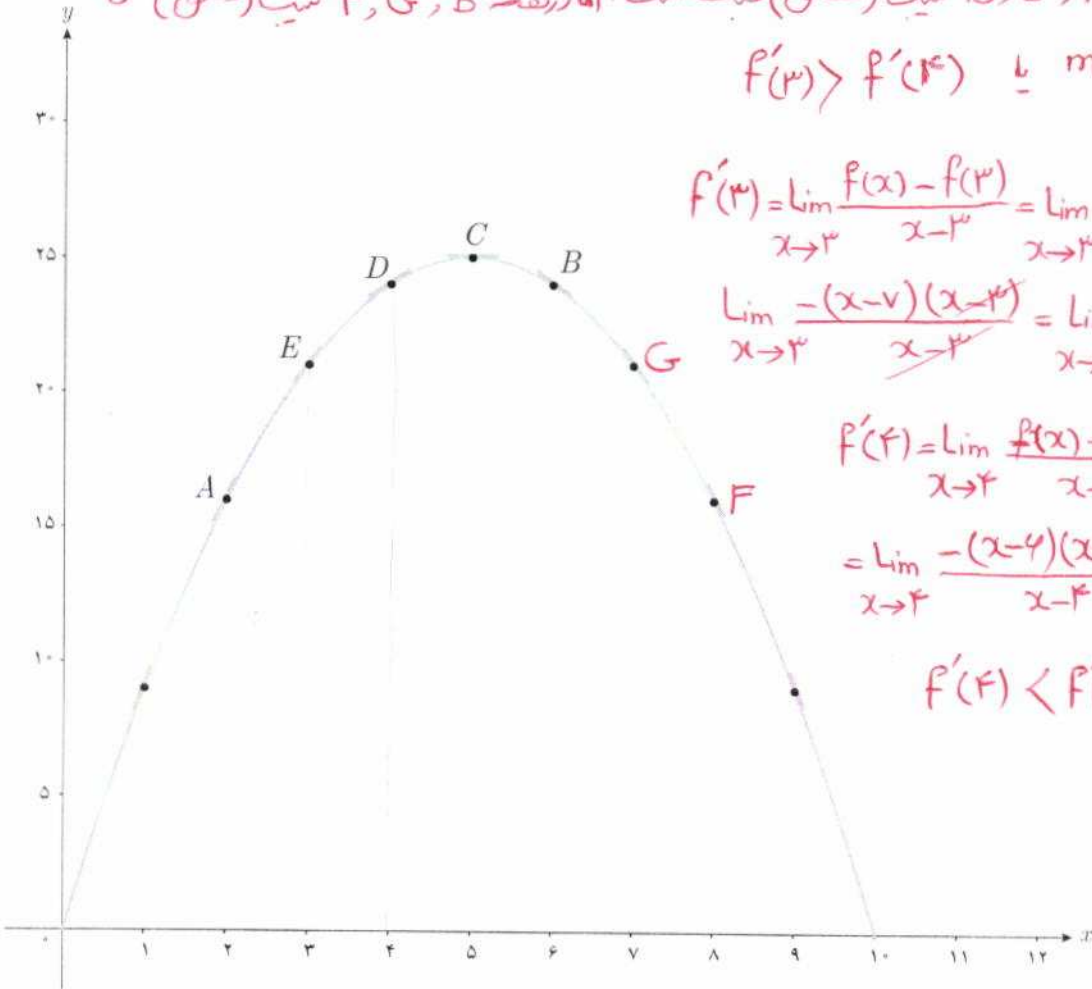
$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 10x - 21}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x-7)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x-7) = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x - 16}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} -(x-4) = 0$$

$$f'(4) < f'(3) \quad \text{تایید}$$



تهیه کننده:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

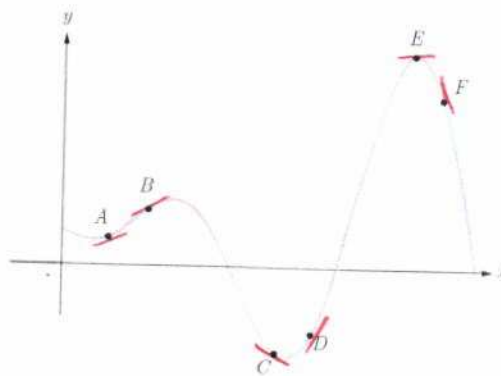
$$y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11$$

درس اول آشنایی با مفهوم مشتق

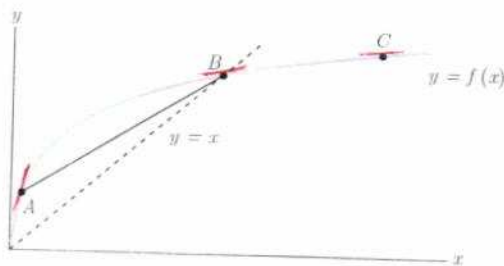
اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



m_1 (الف) شیب نمودار در نقطه A

m_2 (ب) شیب نمودار در نقطه B

m_3 (پ) شیب نمودار در نقطه C

m_4 (ت) شیب خط AB

$m_5 = 0$ (ث) شیب خط $y=2$

$m_6 = 1$ (ج) شیب خط $y=x$

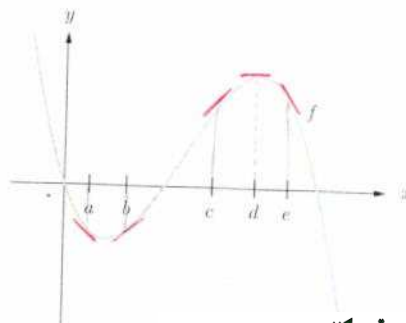
$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1, m_2, \dots, m_6 و

در نظر بگیرید.

با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	-۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲



تهیه کننده:

نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

(الف) نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

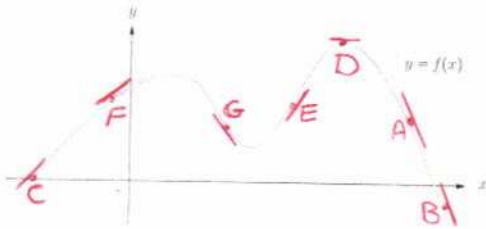
(ب) نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

(ج) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

(د) نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

(ه) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند $f'(x_1) = f'(x_2)$

(ج) نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



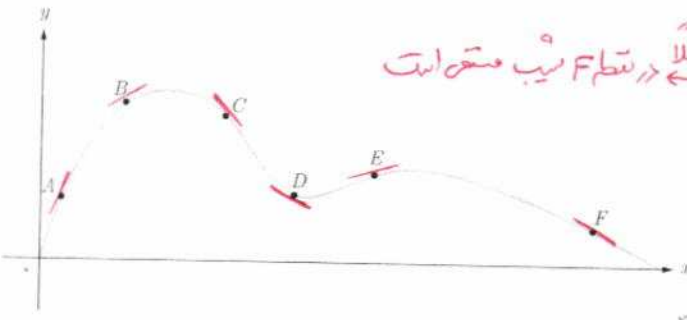
$f(x) > 0, f'(x) < 0$

اگر $f(x) = x^3 - 2x$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید. $f'(x) = 3x^2 - 2$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - (-1 + 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{-1(-2)}{0} \rightarrow \text{undefined}$$

نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



(الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست** (شیب F منفی است)

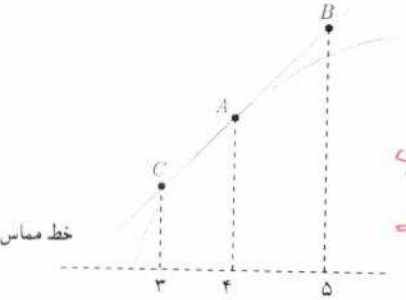
(ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) **نادرست**

(ب) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

(ت) شیب منحنی در نقاط C و D, F منفی است. **درست**

(ث) $m_E < m_D < m_C$ **نادرست**

(ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**



برای تابع f در شکل رویه‌رو داریم: $f(4) = 25$ و $f'(4) = 1/5$ با توجه به شکل

مختصات نقاط A, B, C را بیابید. $f'(A) = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A}$

$\Rightarrow \frac{f(B) - 25}{5 - 4} = \frac{f(C) - 25}{3 - 4} = 1/5$

$\Rightarrow f(B) - 25 = 1 \Rightarrow f(B) = 26 \Rightarrow B(5, 26)$

$\Rightarrow f(C) - 25 = -1 \Rightarrow f(C) = 24 \Rightarrow C(3, 24)$

در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

(الف) علی $s - j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ب) علی s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ب) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

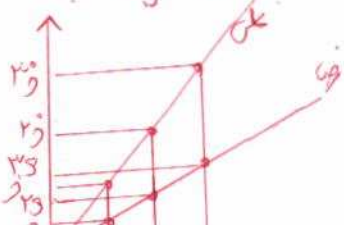
(ت) علی s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

علی	1	2	3	K
علی	j	2j	3j	Kj
رضا	s	2s	3s	Ks

بیشتر علی به رضا نسبت به j/s است. لذا

علی j/s برابر برای رضا مسافت طی خواهد کرد.

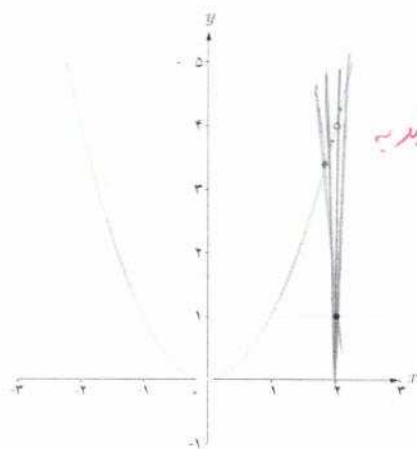


در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟ *زیرا شیب خط مماس در نقطه $x=2$ می‌تواند عدد حقیقی و منحصر به فردی میل به بیند.*
 اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

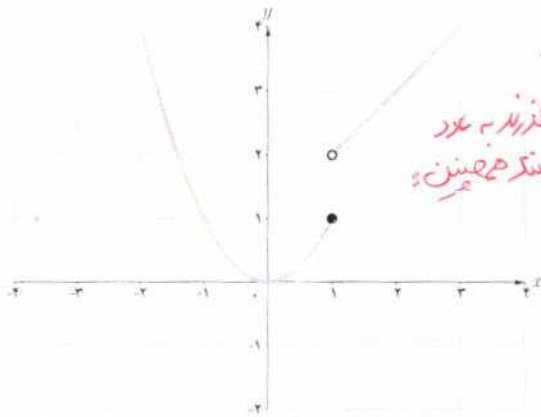
حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟
 زیرا شیب خط‌ها تابع که از نقطه $x=1$ می‌گذرند، عدد حقیقی و منحصر به فردی میل نمی‌کنند به همین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \begin{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \end{cases}$$

یعنی $g'(1)$ وجود ندارد

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left((x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

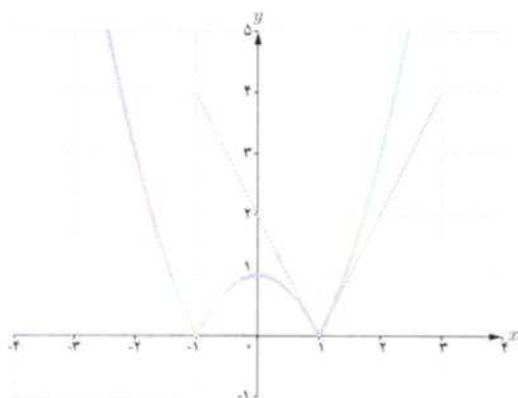
مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر 2 و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -2 است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x=1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می نامیم.

در حقیقت:

شیب نیم مماس چپ $f'_-(1)$

شیب نیم مماس راست $f'_+(1)$

معادله این نیم مماس ها نیز به ترتیب عبارت اند از:

نیم مماس راست $y - 0 = 2(x - 1)$ یا $y = 2x - 2, x \geq 1$

نیم مماس چپ $y - 0 = -2(x - 1)$ یا $y = -2x + 2, x \leq 1$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

$$f'_(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - f(-1)}{x + 1}$$

۱) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -(x - 1) = 2 \Rightarrow f'_+(-1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 2, x > -1$

۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x - 1) = -2 \Rightarrow f'_-(-1) = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 2, x < -1$

معادله نیم مماس ها

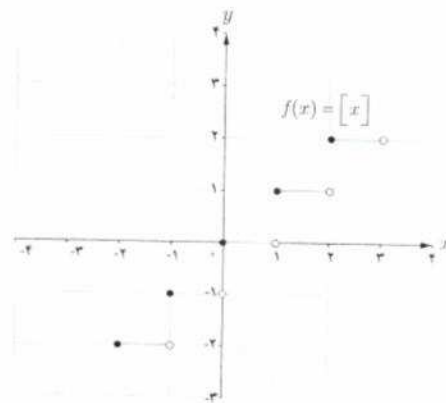
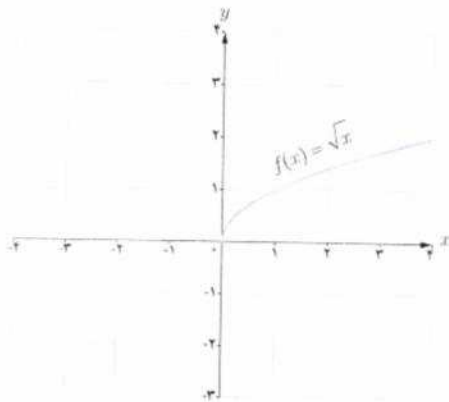
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

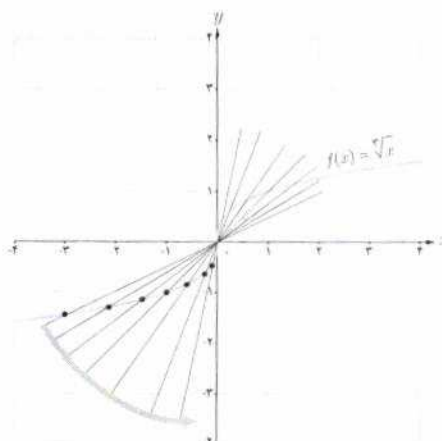
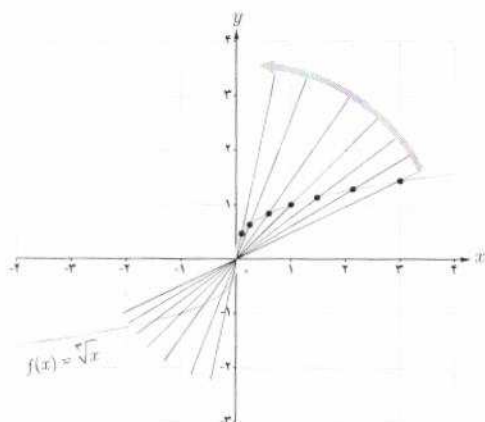
مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.

تهیه کننده:



اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

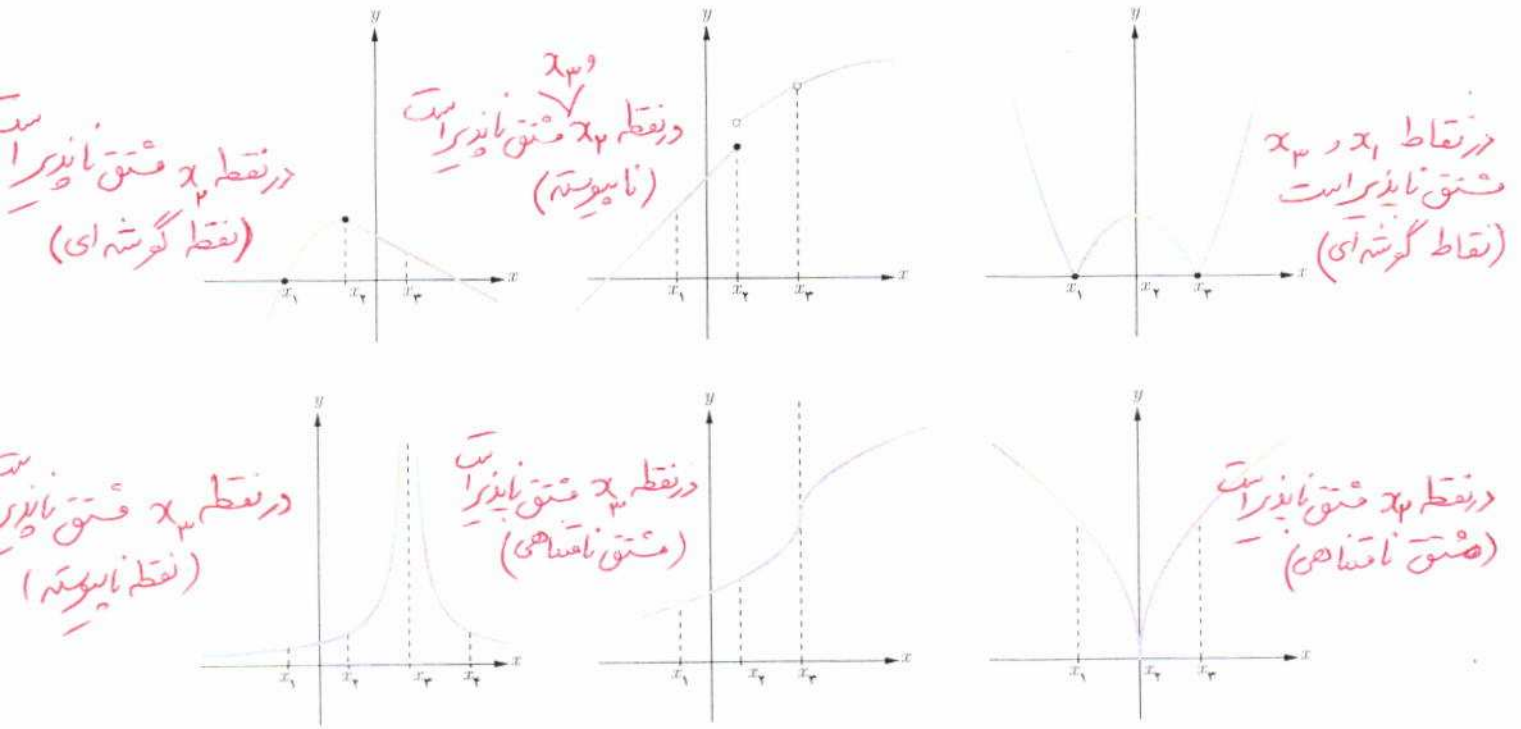
- تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد^۱.
- ۱- f در a پیوسته نباشد.
 - ۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:
 - الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) هر دو نامتناهی باشند.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

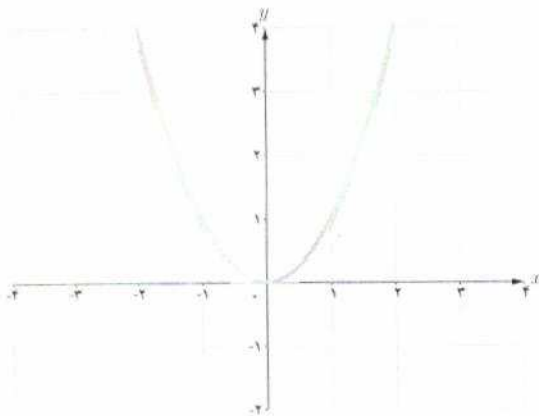
۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های بیجوده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.



تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده اید. حال به دنبال یافتن رابطه ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می گیریم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

نهیہ کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-4	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟ **درکام نقاط**

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \text{ و } f'(50) = 100$$

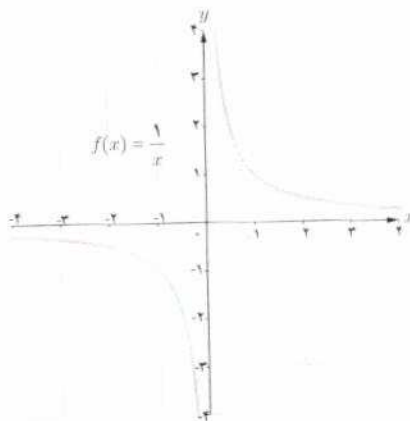
نهیہ کننده:

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید: با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = -\frac{1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد.

به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

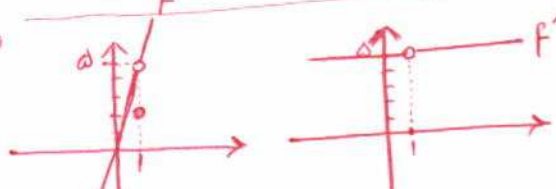
$$D_f = (x \neq 1) \cup (x = 1) = \mathbb{R}$$

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

اگر $x \neq 1 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = 5 \Rightarrow f'(x) = 5$

$$\Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$$

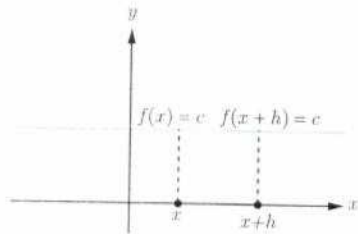
اگر $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 2}{x - 1} = \infty$



محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱- اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۲- اگر $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^1$ ، آن گاه $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$. همچنین اگر $f(x) = x^2$ ، به کمک این دستور نشان می دهیم که: $f'(x) = 2x^1 = 2x$.

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^2$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ به دست آمده است.

در حالت کلی می توان نشان داد که: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x) = x^n$ استفاده شده است.

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می شود، اما در عوض دستور مهم تری را ثابت کرده ایم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ terms}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳- به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

۴* اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax+ah+b - ax-b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

A

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۷- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و

$\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

ب) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.
مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^2$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

ب) $h(x) = (2x^2+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^2+1)(-2x+7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

شما ببینید است که این عبارات در صفا بود با $\frac{1}{x-4}$

کار در کلاس

مشتق تابع های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \frac{(-3x-1)^8}{x^2+5}$

ب) $h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1}$

الف) $f'(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$

ب) $g'(x) = 8 \times \frac{(-3x-1)^7}{x^2+5} \times \frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$

ب) $h'(x) = \frac{1 \times (2x^2+x-1) - (2x^2+x-1)^2}{(2x^2+x-1)^2}$

اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ را به دست آورید.

$(fg)'(2) = f'(2) \times g(2) + g'(2) \times f(2) = 5 \times 8 + (-6) \times 3 = 22$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - g'(2) \times f(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times 8 - (-6) \times 3}{(8)^2} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+3)f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x+3)(4)(x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد.

اگر تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$ را به دست آورید.

حل: با فرض $\frac{x^2}{3x-1} = u$ داریم: $y = u^5$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 5u^4 = \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \cdot 5 \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 = 5 \left(\frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}\right) \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$$

مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2(5x - 1)$

$$f'(x) = ((x^2+1)^2)'x(5x-1) + (5x-1)'x(x^2+1)^2$$

$$f'(x) = 2(x^2+1) \cdot 2x \cdot (5x-1) + 5x(x^2+1)^2$$

$$f'(x) = (x^2+1)^2 x (35x^2 - 2x + 5)$$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^4$

$$g'(x) = 4x \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^3 \times \frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$$

$$g'(x) = 4x \frac{(-3x-1)^3 (3x^2 + 2x - 15)}{(x^2+5)^4}$$

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هر گاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هر گاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق

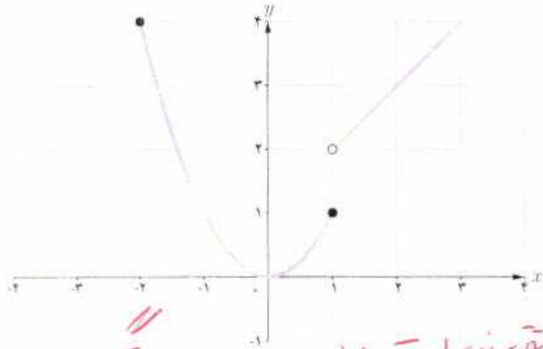
راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

تهیه کننده:



مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
 تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $(1, \infty)$ و $[-2, 1)$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه

$[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟) اولاً f روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است اما در $x=1$ مشتق راست ندارد.

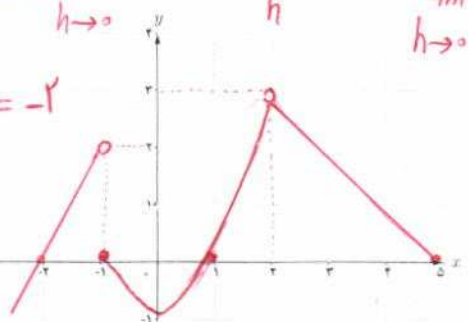


$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1)$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

اگر $x \in (-1, 1) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$

$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x + 1} = -2$

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = 2$



پس f روی بازه $[-1, 1)$ مشتق پذیر است.

اگر $x \in (2, 5) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + 5 - (-x + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$

پس f روی بازه $(2, 5)$ مشتق پذیر است.

چون طبق نمودار، f در $x = -1$ مشتق پذیر نیست و $-1 \in (-2, 0)$ پس f روی بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - f-0}{x-0} = \infty$$

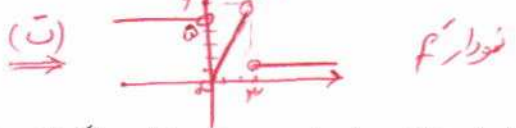
$$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+4-9}{x-3} = 1 \rightarrow f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

فصل ۴ مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} \Delta & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می گیریم.

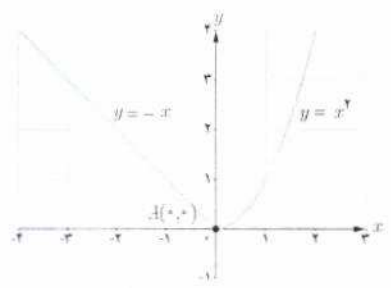
مثال: اگر $y=3x^2+2x^3-1$ آن گاه:

$$y' = 6x + 6x^2, \quad y'' = 6 + 12x$$

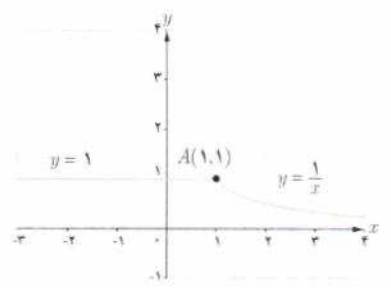
دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

$$f(x) = |x-2|, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

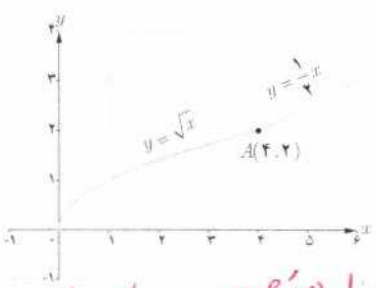
با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



$f'_-(f) \neq f'_+(f)$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = 0$$

$$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-1}{x-1} = 0$$

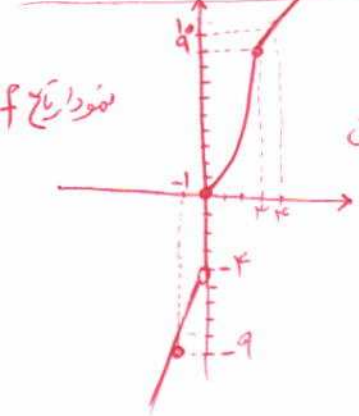
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = -1$$

$$f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$$f'_-(f) = \lim_{x \rightarrow f^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-f} = \frac{1}{4}$$

$$f'_+(f) = \lim_{x \rightarrow f^+} \frac{\frac{1}{4}x-2}{x-f} = \frac{1}{4}$$



نمودار تابع f

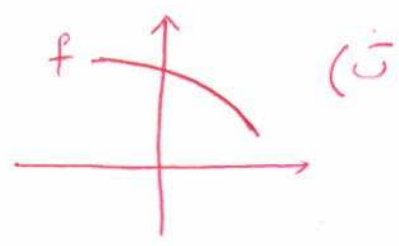
(ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.
با توجه به نمودار تابع f ، تابع f' در $x=0$ ناموجود است.

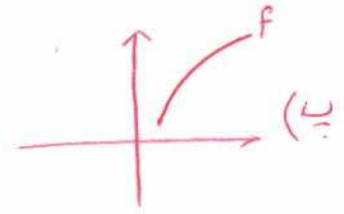
(ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.
(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
(ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

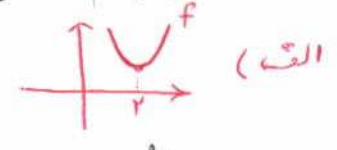
(ج) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن
(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.
(ب) در تمام نقاط مثبت باشد.
(ت) در تمام نقاط منفی باشد.



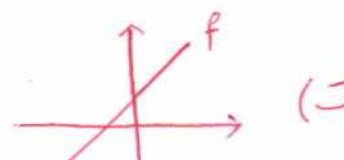
(ب)



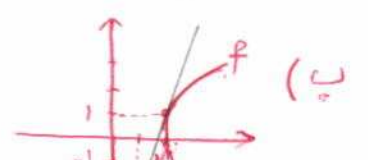
(ت)



(الف)

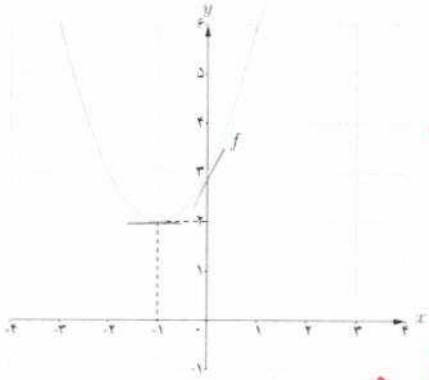


(ب)



(ب)

ادامه در برابر



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

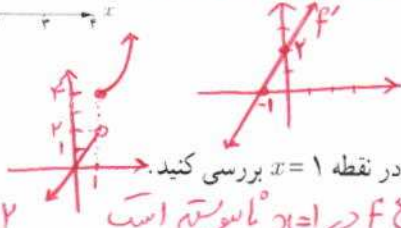
$$0 = f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(2) = 4, f'(-1) = 0, f'(0) = 2, f'(3) = 8$$

ب) تابع مشتق را رسم کنید.



$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 4}{x - 1} = \infty$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.
 توضیح: تابع f در $x = 1$ ناپیوسته است.

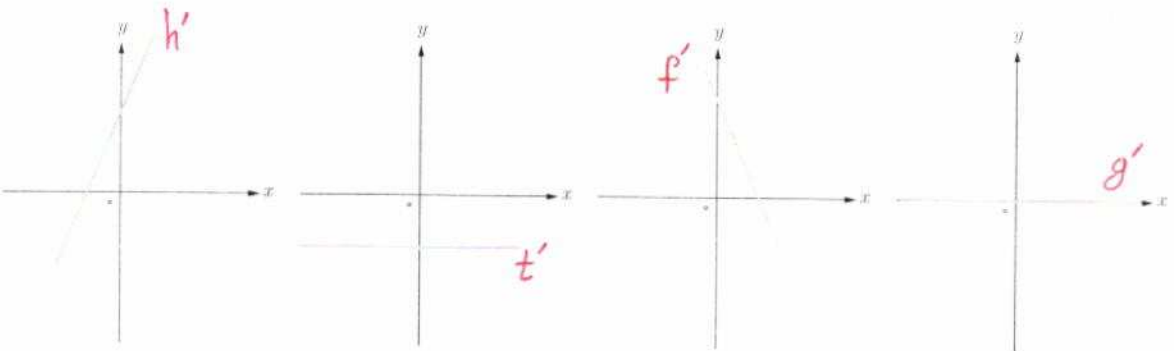
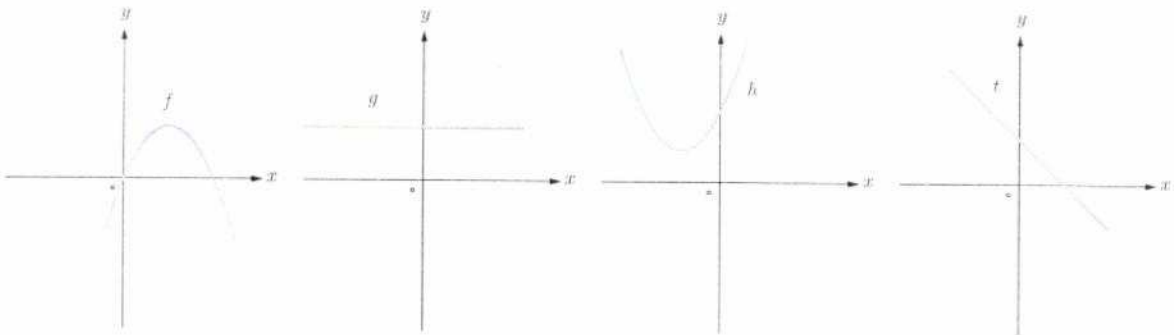
سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x - 1, & f_2(x) &= 3x + 5, & f_3(x) &= 3x \\ g_1(x) &= 5, & g_2(x) &= \frac{1}{3}, & g_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های 2 و -2 بررسی کنید.

↓ جواب در پایین صفحه

نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



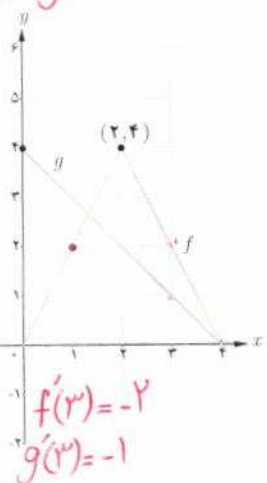
جواب (v) $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$, $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$ $\Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$

$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$, $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} -(x + 2) = -4$ $\Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$

الف) $h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + g'(1) \cdot f(1) = 2 \times 2 + (-1) \times 2 = 2$

$f'(1) = \frac{4-2}{2-1} = 2$
 $g'(1) = \frac{4-0}{0-2} = -1$

وجود ندارد
 $f'(2) = -2$
 $g'(2) = -1$



نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(3)$ و $h'(2)$ ، $h'(1)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(3)$ و $k'(2)$ ، $k'(1)$

$k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \times 2 - (-1) \times 2}{(2)^2} = \frac{4}{4} = 1$

$k'(2) = \frac{f'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)}{(g(2))^2} = \frac{-2 \times 4 - (-1) \times 0}{(4)^2} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$

$k'(3) = \frac{f'(3) \cdot g(3) - g'(3) \cdot f(3)}{(g(3))^2} = \frac{-2 \times 1 - (-1) \times 2}{(1)^2} = 0$

اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است $(3f + 2g)'(1)$ و $(f + g)'(1)$

$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$ ، $(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_-(0)$ و $f'_+(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$ ، $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = 0 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow f'(0) = \text{وجود ندارد}$

مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = 4x(2x-5)^3 + 4(2x-5)^2(3x^2-4)$
 $= 4(2x-5)^2(5x^2-5x-4)$
 الف) $f(x) = (2x^3 - 4)(2x - 5)^2$

ب) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}} \times (x^2+1) + 3x^2 \times \sqrt{3x+2}$

ب) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

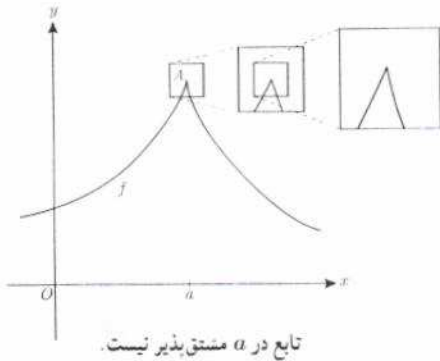
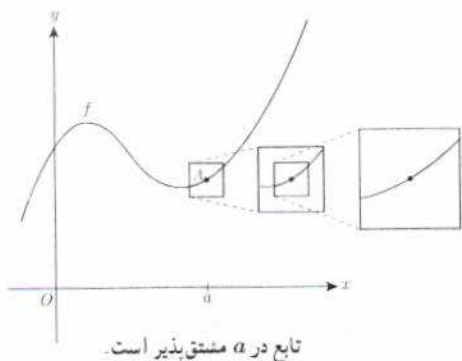
ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ن) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{9 \times \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \times (9x-2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$

ب) $f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2} = \frac{-3x^2+4x-3}{(-3x+2)^2}$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.

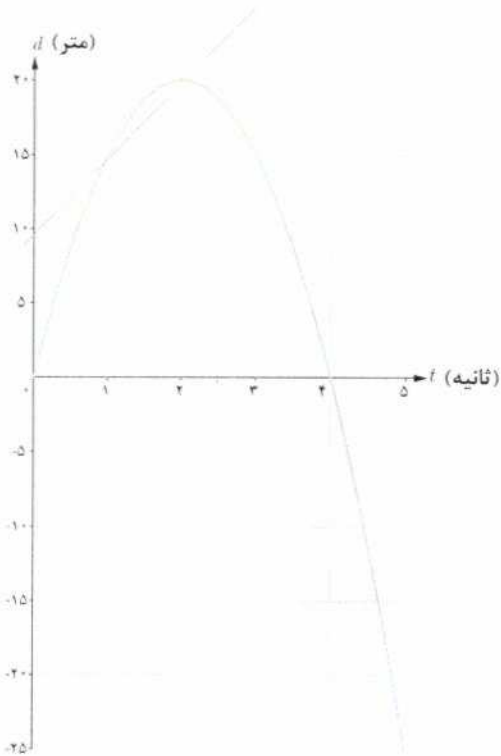


با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 28° کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $7^{\circ} = \frac{28^{\circ}}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان-زمان (شکل):
الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ ، $[1, 1/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.



ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/3]$ و $[1, 1/2]$ و... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/5 - 15}{-4/5} = \frac{3/5}{-4/5} = -3/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{-3/4} = \frac{3/2}{-3/4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

$$\text{پ) } d'(t) = -10t + 20, \text{ پس } d'(1) = 10$$

$$\text{ت) } d'(2) = 0, \quad d'(3) = -10$$

تهیه کننده:

سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

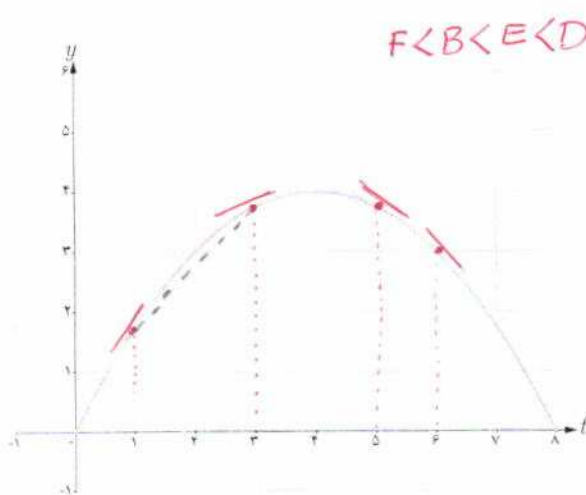
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابری دارند.



نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

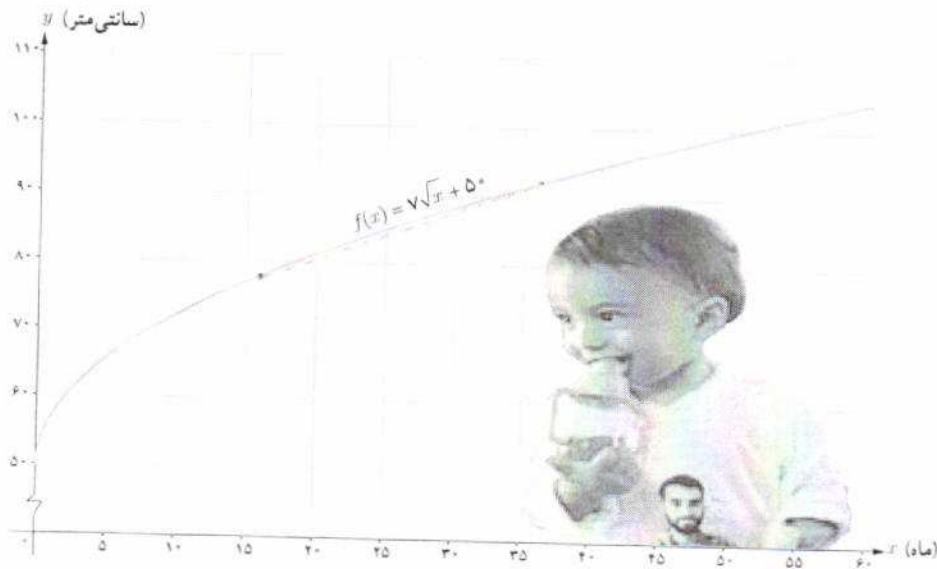
تهیه کننده:

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد: تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. به طور مثال $f(25) = 85$ آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.09 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانی متر در هر ماه است.



الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

$$\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{25}{25} = \frac{1}{1} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{f(x) - f(25)}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} + 50 - 85}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{1}{\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{\sqrt{25} + 5} = \frac{1}{10} \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$$

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

$$\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{95 - 80}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75 \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 49} \frac{f(x) - f(49)}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{\sqrt{x} + 50 - 99}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{\sqrt{x} - 7}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{1}{\sqrt{x} + 7} = \frac{1}{\sqrt{49} + 7} = \frac{1}{14} \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$$

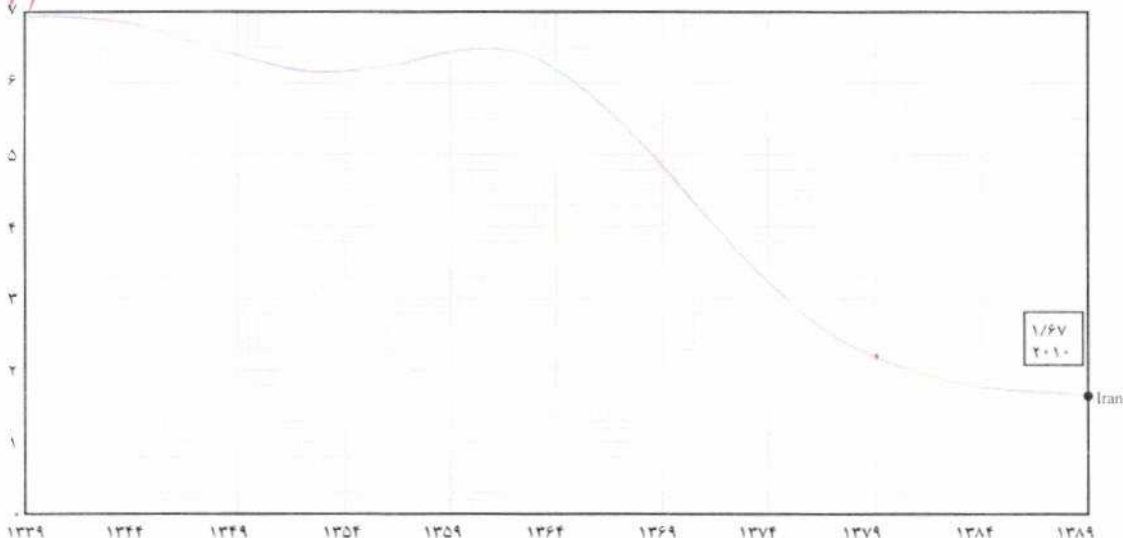
آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۴۹ ماهگی > آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۲۵ ماهگی

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹, ۱۳۸۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0/108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2/2 - 4/2}{15} = \frac{-4}{15} \approx -0/27$$



میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی ها نشان می دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ ترین و سریع ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می کند که این سیاست ها تا دست یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

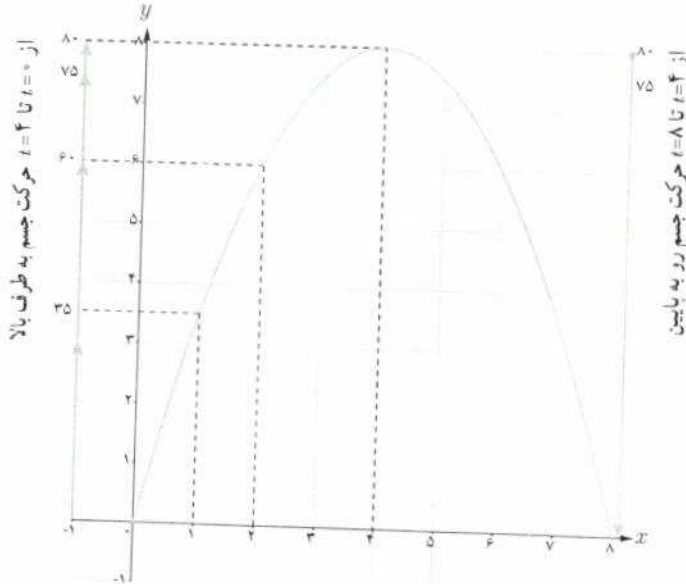
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان-زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[1, 2]$ ، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s}, \quad h'(2) = 20 \text{ m/s}, \quad h'(3) = 10 \text{ m/s}, \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس

جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت

لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

با توجه به مثال قبل:

(الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

هنگام پرتاب: $t=0 \Rightarrow h'(0) = 40 \text{ m/s}$

هنگام برخورد به زمین: $t=1 \Rightarrow h'(1) = -40 \text{ m/s}$

(ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید.

سرعت متوسط: $\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 175}{3} = -58.3 \text{ m/s}$

(ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 35 m/s و -35 m/s است.

سرعت مثبت: $35 = -1.0t + 40 \Rightarrow t = 0.5 \text{ s}$
 سرعت منفی: $-35 = -1.0t + 40 \Rightarrow t = 7.5 \text{ s}$

جدول زیر درجه حرارت T (ساعتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت t	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط (الف): $\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2 \text{ } ^\circ\text{C/h}$

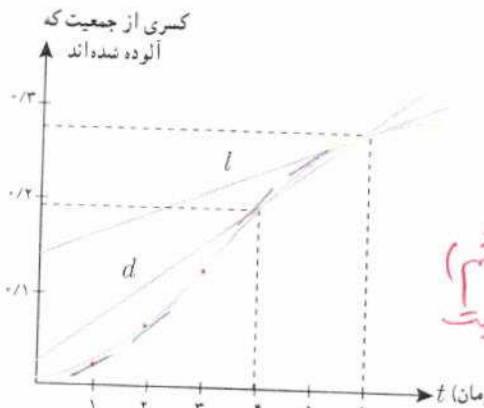
آهنگ تغییر متوسط (ب): $\frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -1.67 \text{ } ^\circ\text{C/h}$

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

(الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

(ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پاسخها را تفسیر کنید. در بازه زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲، درجه حرارت با آهنگ $2 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ درجه حرارت در حال افزایش است اما در بازه زمانی ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸، درجه حرارت با آهنگ $-1.67 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ درجه حرارت در حال کاهش است. کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.



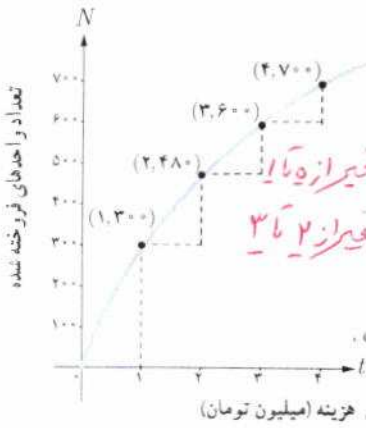
(الف) شیب های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می دهند.

(ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ در $t=3$

(ب) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در $t=4$

آهنگ تغییر متوسط (الف) شیب خط l ، کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه $t=4$ (هفتم ششم) نشان میدهد. شیب خط d ، آهنگ تغییر متوسط، کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله زمانی $t=4$ تا $t=4$ (هفتم ششم) نشان میدهد.

جواب ۱) ب) عبارت دیگر، طور متوسط در هر ساعت، ۲ درجه درجه حرارت (در فاصله زمانی ۸ تا ۱۲) اضافه می شود اما ب) طور متوسط در هر ساعت، ۱.۶۷ درجه از درجه حرارت (در فاصله زمانی ۱۲ تا ۱۸) کاسته می شود.



نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

آهنگ تغییر از ۰ تا ۱: $\frac{3000-0}{1-0} = 3000$ ، آهنگ تغییر از ۱ تا ۲: $\frac{4800-3000}{2-1} = 1800$ ، آهنگ تغییر از ۲ تا ۳: $\frac{6000-4800}{3-2} = 1200$ ، آهنگ تغییر از ۳ تا ۴: $\frac{7000-6000}{4-3} = 1000$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

نریا با افزایش t (هزینه) رشد تعداد کالاها فروخته شده کمتر شده است. شاید به نوعی با افزایش هزینه تبلیغ، قیمت کالا بیشتر و لذا خریداران کمتر شود.

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام

لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

t	s	0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6
f(t)	m	11	12/4	13/8	15/1	16/3	17/4	18/4

تویی از یک بل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. f(t) نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر f(t) در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان 0/4 ثانیه، است نشان دهد؟

$\frac{f(0.5) - f(0)}{0.5 - 0} = 4$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 11$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 12$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 13$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 14$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 15$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 16$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 17$ ، $\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 18$

x	0	5	10	15	20
f(x)	100	70	55	46	40
f'(x)	-6	-3	-1.8	-1.4	?

کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. نادرست
 ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. نادرست
 ج) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ در $x=1$ نادرست

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه

از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

الف) $\frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 39.204 - 40 = -0.796$ لیتر

ب) $\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = -0.4$ لیتر

$-\frac{1}{100}(1 - \frac{t}{100}) = -0.4 \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = 40 \Rightarrow t = 50$

کاربرد مشتق



مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنه این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیمم نمودن فاصله زمان و هزینه و همچنین ماکزیمم کردن حجم، مساحت و سود گسترده است.

اکستریم‌های تابع

درس اول

بهینه‌سازی

درس دوم

درس اول

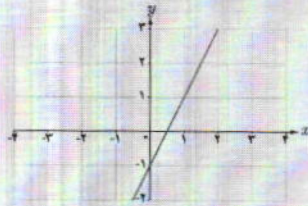
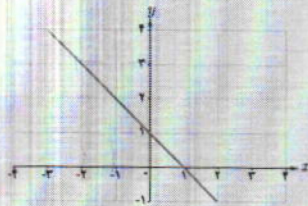
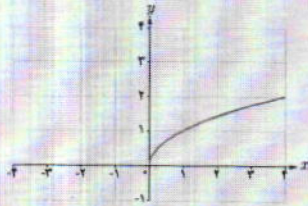
اکسترم‌های تابع

یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

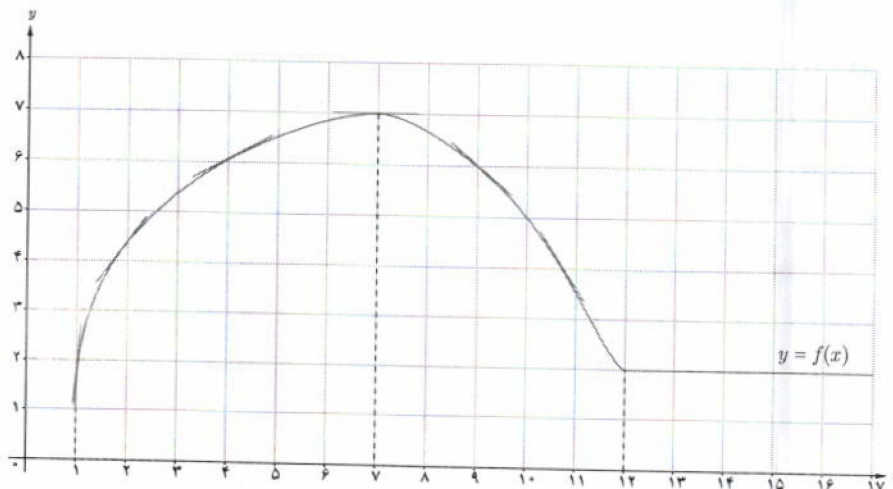
ضابطه تابع	نمودار تابع	یکنوایی تابع	تابع مشتق	علامت مشتق
$f(x) = 2x - 1$		تابع f در \mathbb{R} اکیداً صعودی است	$f'(x) = 2$	f' همواره مثبت است
$g(x) = -x + 1$		تابع g در \mathbb{R} اکیداً ^{نزولی} است	$g'(x) = -1$	g' همواره ^{منفی} است
$h(x) = \sqrt{x}$		تابع h در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است	$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	h' در $(0, +\infty)$ ^{مثبت} است

$u(x) = -\sqrt{x}$		<p>تابع u در $[0, +\infty)$ اکیداً بردی است</p>	<p>u' در $(0, +\infty)$ همواره منفی است $u'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$</p>
$k(x) = x^2$		<p>تابع k در $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.</p>	<p>k' در $(-\infty, 0)$ منفی و در $(0, +\infty)$ مثبت است. $k'(x) = 2x$</p>
$l(x) = x^3$		<p>تابع در \mathbb{R} اکیداً صعودی</p>	<p>l' در $(-\infty, 0)$ مثبت و در $(0, +\infty)$ مثبت است. $l'(x) = 3x^2$</p>

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را در نظر بگیرید:



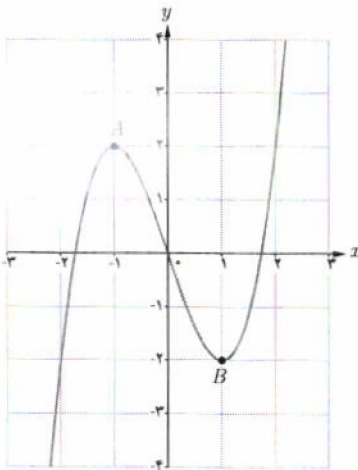
ملاحظه می‌شود که:

- الف) در بازه $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f ، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' **مثبت** است.
- ب) در بازه $(7, 12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f ، **منفی** است؛ بنابراین در این بازه علامت f' **منفی** است.
- پ) در بازه $(12, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر **صفر** است.

مطلب فوق برای توابع مشتق پذیر همواره درست است که آن را به شکل زیر بیان می کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

- الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
 ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.
 پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f ، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل: f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
بازه		$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
علامت f'		+	-	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	اکیداً صعودی	$+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده ایم. آن را با جدول مقایسه کنید. در نقطه A ماکزیمم و در نقطه B مینیمم وجود دارد.

اکسترم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول 1 و -1 را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطه ماکزیمم نسبی f و B نقطه مینیمم نسبی آن است.

۱- رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

تعریف: گوئیم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

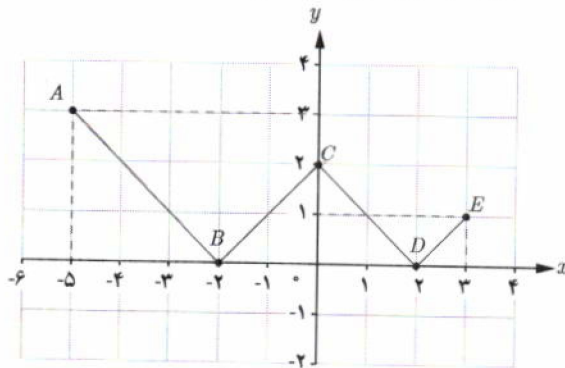
همچنان که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطه $A(-1, 2)$ ماکزیم نسبی دارد و مقدار ماکزیم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

تعریف: گوئیم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

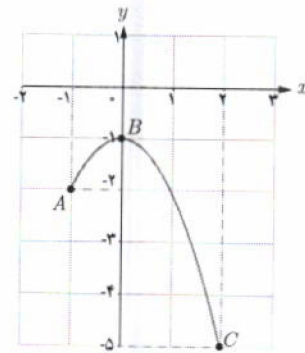
در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟ در نقطه $(1, 1)$ مینیمم نسبی دارد مقدار آن برابر ۱- می‌باشد.
تذکر: نقاط ماکزیم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترم آن تابع هم می‌گوئیم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترم‌های نسبی تابع هستند.

کار در کلاس

نوع اکسترم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



الف) $f(x) = ||x - 2|, x \in [-5, 3]$



ب) $g(x) = -x^2 - 1, x \in [-1, 2]$

گروه ریاضی دوره دوم استاد خونگ

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	-	-
B	min نسبی	0	$f'(-2)$ موجود نیست
C	max نسبی	2	-
D	min نسبی	0	-
E	نه min و نه max	-	-

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترم نسبی نیست	-	-
B	max نسبی	-1	$f'(0)$ برابر صفر است
C	نقطه اکسترم نسبی ندارد	-	-

$f'(0)$ مشتق ندارد در (0)
 $f'(2)$ مشتق ندارد در (2)

نقاط بحرانی تابع

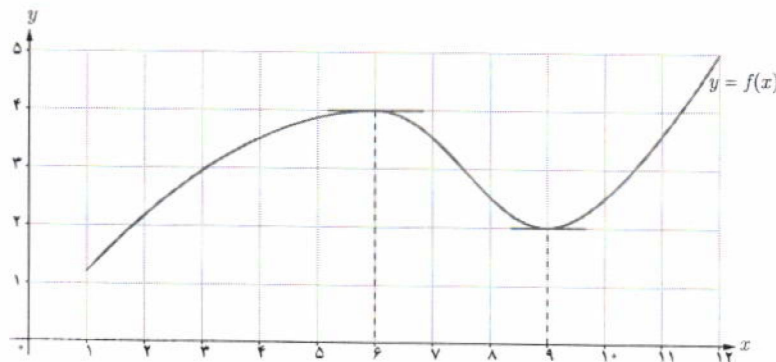
حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنه تابع f باید به دنبال اکسترم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از نقاطی از دامنه f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم:

تعریف: فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال: در کار در کلاس قبل دیدیم که تابع $f(x) = |x| - 2$ در نقاط C, B و D مشتق‌ناپذیر است. به عبارت دیگر، نقاط به طول -2 ، صفر و 2 که جزو نقاط دامنه f هستند، در دامنه f' نیستند. پس، این سه نقطه، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. همچنین در همین کار در کلاس، مشتق تابع $g(x) = -x^2 - 1$ به ازای صفر برابر صفر است؛ یعنی $g'(0) = 0$. بنابراین نقطه $(0, -1)$ ، نقطه بحرانی تابع g است.

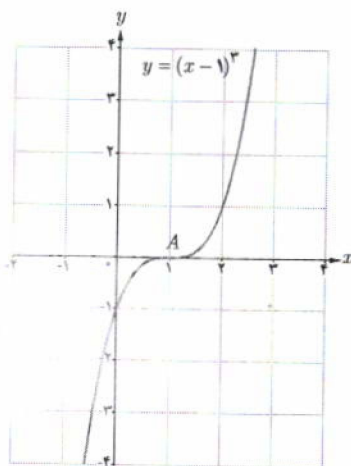
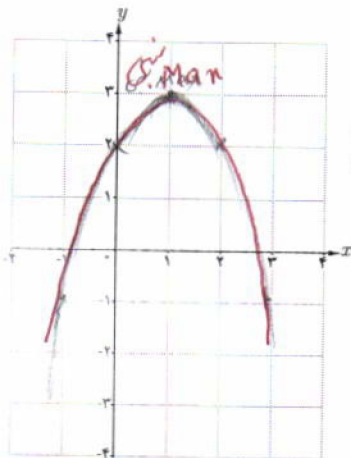
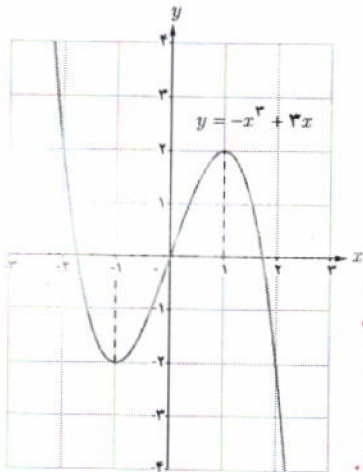
نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را در نظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم:

$$f'(6) = 0, \quad f'(9) = 0$$



این مطلب در مورد نقاط اکسترم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

قضیه فرما: اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. به عبارت دیگر، هر نقطه اکسترم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.



۱ الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x-2|$ ، نشان دهید که f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد.

$f'_x(2) = -1$

$f'_x(2) = 1$

$f'(m) = -3m^2 + 3$

$f'(m) = 0 \Rightarrow -3m^2 + 3 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$f(1) = 2$

$f(-1) = -2$

دقت فرمایید بر فرار از

چرا؟ $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟ $f'(2)$ چیست؟ چرا؟ $f'(2)$ چیست؟ چرا؟ $f'(2)$ چیست؟ چرا؟

۲ نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کرده ایم.

الف) طول‌های نقاط اکستریم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در \mathbb{R} مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ ، یعنی $x = \pm 1$ طول‌های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه فرما را در مورد این تابع بررسی کنید.

۳ تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

$f'(m) = -2m + 2$

الف) $f'(x)$ را به دست آورید.

$-2m + 2 = 0$

$\Rightarrow -2m = -2 \Rightarrow m = 1$

ب) ریشه معادله $f'(x) = 0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید. پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطه اکستریم f منطبق بر نقطه بحرانی آن است؟

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابع مشتق، همواره طول نقاط اکستریم نسبی تابع را به دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست.

مثال: به نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3$ دقت کنید. تابع مشتق این تابع به صورت $f'(x) = 3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x=1$ برابر صفر است، اما با توجه به نمودار f ، دیده می‌شود که نقطه به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f' ، قبل و بعد از $x=1$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در \mathbb{R} اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکستریم نسبی داشته باشد.

تذکر: مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطه A به طول $x=1$ برای تابع $f(x) = (x-1)^3$ یک نقطه بحرانی است، اما اکستریم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطه بحرانی لزوماً اکستریم نسبی نیست.

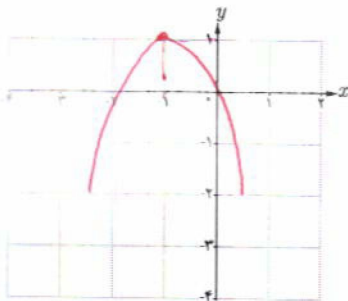


۱ جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^2 - 2x$ در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت f' ، بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است:

$$f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ طول نقطه بحرانی}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
بازه	$(-\infty, -1)$		$(-1, +\infty)$
علامت f'	$+$	0	$-$
یکنوایی f	صعودی اکید		نزولی اکید
	$-\infty$	max نسبی	$-\infty$



با توجه به جدول، مشخص است که نقطه به طول (-1) ، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x) = x^2 - 3x$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد. $g'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1.5$

	$-\infty$	0	1.5	$+\infty$
بازه f	$(-\infty, 0)$	$(0, 1.5)$	$(1.5, +\infty)$	
علامت f'	$+$	0	$-$	$+$
یکنوایی f	صعودی	صعودی	نزولی	صعودی

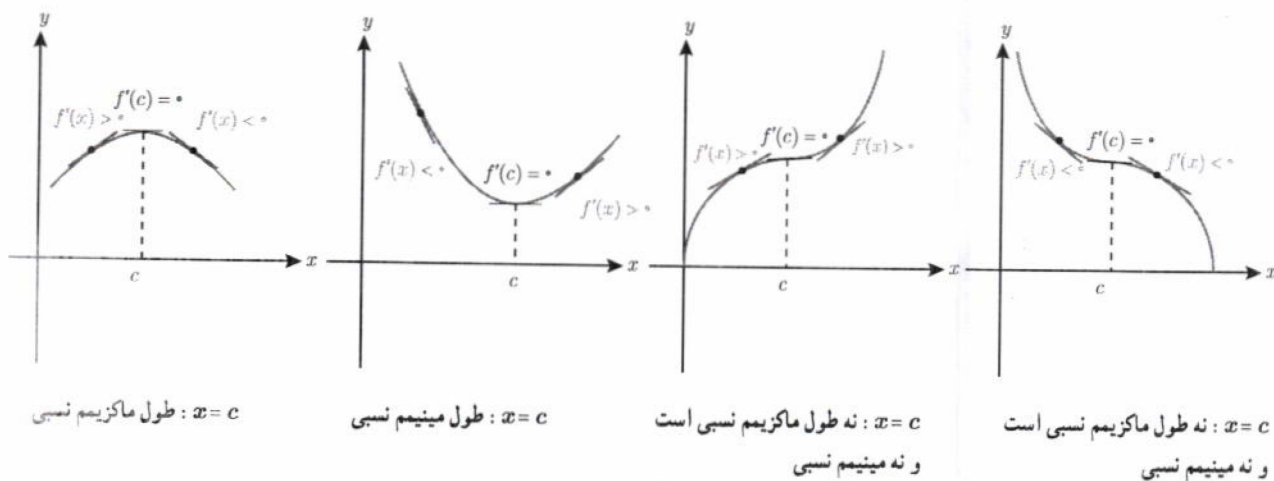
مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را آلفا می‌کنند که تغییر رفتار این گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهنده نقطه ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

آزمون مشتق اول

فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد.

- (الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.
 (ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.
 (پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به طوری که f در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطه c در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.

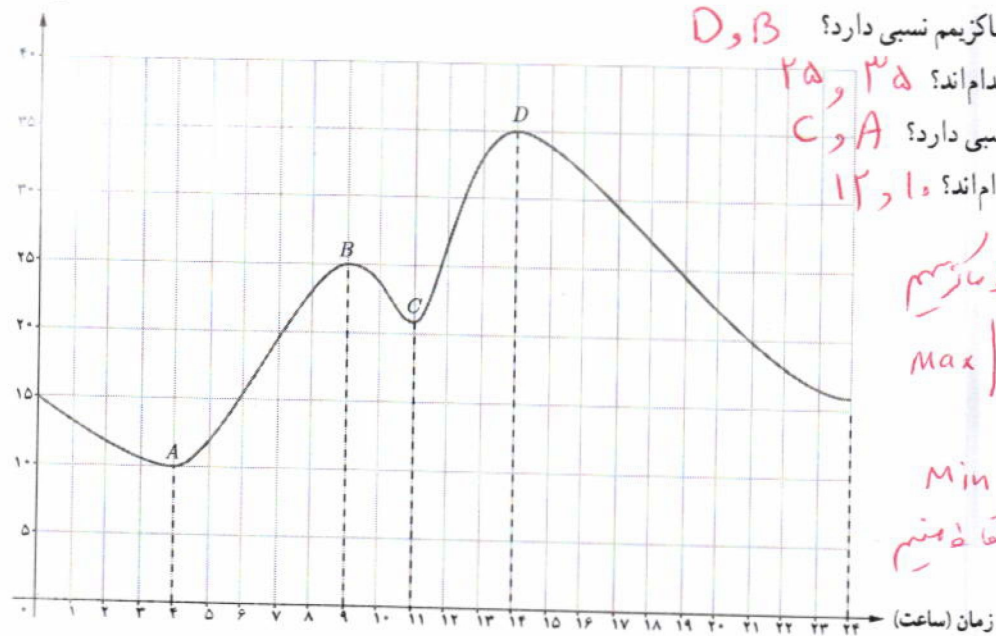


اکسترم‌های مطلق تابع

فعالیت

نمودار زیر نشان‌دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

دما (سانتی‌گراد)



الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیم نسبی دارد؟ D, B
 ب) مقادیر ماکزیم نسبی تابع کدام‌اند؟ $۳۵, ۲۵$
 ب) تابع در چه نقاطی مینیم نسبی دارد؟ C, A
 ت) مقادیر مینیم نسبی تابع کدام‌اند؟ $۱۲, ۱۰$

تپ ماکزیم
 Max | B
 D
 تپ مینیم
 Min | A
 C

با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطه $D(14, 35)$ ماکزیم مطلق تابع است و مقدار ماکزیم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطه مینیم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیم مطلق آن را بنویسید. تابع در نقطه $(10, 12)$ مینیم مطلق دارد و مقدار مینیم مطلق آن ۱۰ می‌باشد.

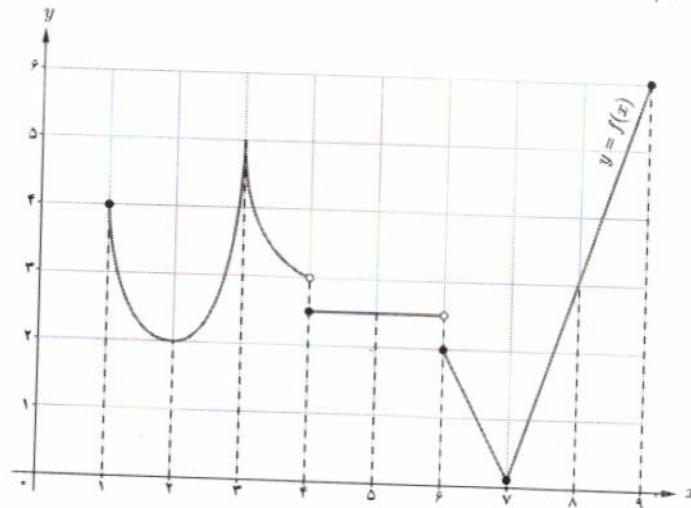
تعریف: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D ، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

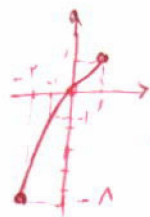
کار در کلاس

با تکمیل جدول زیر، اکسترم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
مطلق max	x	x	X	X	x	x	X	X	✓
مطلق min	x	x	X	X	x	x	✓	X	x
نسبی max	x	x	✓	X	✓	x	X	X	x
نسبی min	x	✓	X	✓	✓	x	✓	X	x
نقطه بحرانی	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	x

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

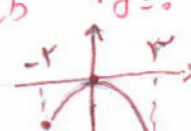


الف) $t(x) = x^2$; $x \in [-2, 1]$

نم ماکزیمم در $x=0$ داریم
در $x=-2$ مینم مطلق داریم
در $x=1$ ماکس مطلق داریم

ب) $g(x) = -x^2$; $x \in [-2, 3]$

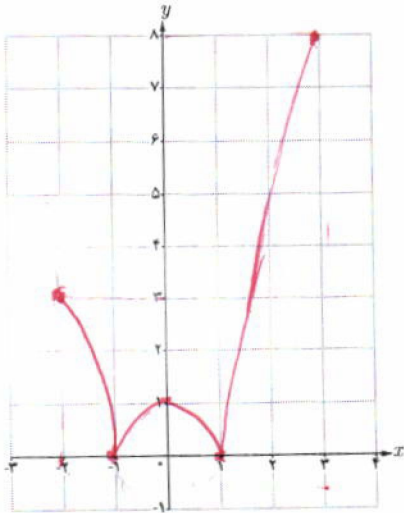
Max مطلق در $x=0$ داریم
Min مطلق نسبی در $x=3$ داریم



ب) $u(x) = \frac{1}{x}$

نم ماکزیمم در $x=0$ داریم
Min مطلق نسبی در $x=0$ داریم





تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترم مطلق را تعیین کنید. **در اول، Min مینیمی و مطلق دارد. در ۳، Man ماکزیمم مطلق دارد.**

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوسته $f(x) = |x^2 - 1|$ در بازه بسته $[-2, 3]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیه فوق، تنها وجود اکسترم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته $[a, b]$ به شرح زیر است:

- ۱- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.
- ۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
- ۳- در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است.

مثال: نقاط اکسترم مطلق تابع $f(x) = 2x^2 + 3x - 12$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.
حل: ابتدا به کمک f' ، نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = 4x + 3 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \text{ نقطه بحرانی} \end{cases}$$

x	-1	1	3
$f(x)$	13	-7	45

علاوه بر نقطه بحرانی، مقدار تابع را در نقاط انتهایی بازه هم به دست می‌آوریم که در جدول مقابل آمده است.

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازه $[-1, 3]$ برابر 45 و کوچک‌ترین مقدار، مساوی -7 است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

برای هر x در \mathbb{R} داریم
 استوانه خونی

سوال ۱) $f'(n) = 3n^2 - 12 \Rightarrow f'(n) = 0 \Rightarrow 3n^2 = 12 \Rightarrow n = \pm 2$
 $n=2 \rightarrow y=-12$
 $n=-2 \rightarrow y=12$

n	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'		+	-	+

نقطه کمترین در $(-2, 12)$ می باشد و نواحی در آن نزولی است

تمرین

سوال ۲) $g'(n) = \frac{0 \cdot (n^2+1) - 2n(2n)}{(n^2+1)^2}$ چرا؟
 ۱) بزرگترین بازه از \mathbb{R} که تابع $f(x) = x^2 - 12x + 4$ در آن نزولی است، کدام است؟

$g'(n) = 0 \rightarrow -2n = 0 \Rightarrow n = 0$

n	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(n)$	+	-	+

۲) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی است و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

۳) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$
 ب) $g(x) = x^2 + 3x^2 - 4$ $y'(n) = 2n^2 + 6n$
 ج) $h(x) = \sqrt[3]{x}$ $h'(n) = \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$

در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^2 + 3x^2 - 9x - 10$ $f'(n) = 2n^2 + 6n - 9$
 $f'(n) = 0 \Rightarrow 2(n^2 + 3n - 4.5) = 0$
 $(n-1)(n+3) = 0 \Rightarrow n = 1, n = -3$

ب) $g(x) = -2x^2 + 3x^2 + 12x - 9$ $g'(n) = -4n^2 + 6n + 12$
 $g'(n) = 0 \Rightarrow -4(n^2 - 1.5n - 3) = 0$
 $(n-2)(n+1) = 0 \Rightarrow n = 2, n = -1$

ج) $h(x) = -x^2 - 3x + 2$ $h'(n) = -2n - 3$
 $h'(n) = 0 \Rightarrow -2n - 3 = 0 \Rightarrow n = -1.5$

الف) $f(x) = -2x^2 + 9x^2 - 13$; $x \in [-1, 2]$ $y' = 0 \rightarrow -4x^2 + 18x = 0 \rightarrow -2x(2x - 9) = 0$
 $x = 0 \rightarrow y = -13$
 $x = 4.5 \rightarrow y = -13$ (خارج از دامنه)

ب) $g(x) = x^2 + 2x - 5$; $x \in [-2, 1]$ $y' = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$
 $x = -1 \rightarrow y = -4$

ج) $h(x) = x^2 + 2x - 5$; $x \in [-2, 1]$ $y' = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$
 $x = -1 \rightarrow y = -4$

۶) اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^2 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

$f'(n) = 0 \Rightarrow 0 = 2(2) + 2(2)b + 0 \Rightarrow b = -3$
 $1 = 1 + 4(-3) + d \Rightarrow d = 5$

۷) نمودار تابعی مانند f با دامنه \mathbb{R} را رسم کنید به طوری که هر نقطه دلخواه از D_f ، یک نقطه بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

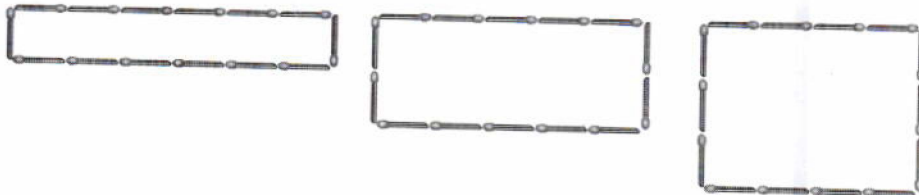
جزء صحیح

$f(n) = k$, $f(n) = [n]$
 $k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و ... در تمام این فعالیت‌ها، هدف آن است که بهترین تصمیم‌ها اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را در نظر بگیرید که با استفاده از روش‌های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی در زمرهٔ مسائل بهینه‌سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل‌اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد در نظر بگیریم. با استفاده از همهٔ این چوب‌کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجهٔ کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر 14 واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم محیط، دیده می‌شود که مساحت‌ها برابر نیستند و به ترتیب برابر 13 ، 12 و 10 واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می‌شود که هرچه قدر اندازهٔ طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، مساحت آن افزایش می‌یابد.

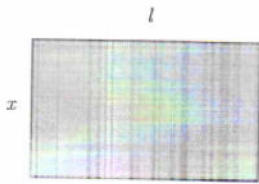
۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	0.5×6.5	1×6	2×5	2.5×4.5	3×4	3.5×3.5	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	3.25	۶	۱۰	11.25	۱۲	12.25	...

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، 12.25 است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد 12.25 واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟ بله

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟ 12.25

درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.



مثال ۱: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

حل: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است:

$$S = x.l \quad (1)$$

برای آنکه S به صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به دست آوریم:

$$P = 14: \text{ محیط مستطیل}$$

$$2(x + l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$S(x) = x(7 - x)$$

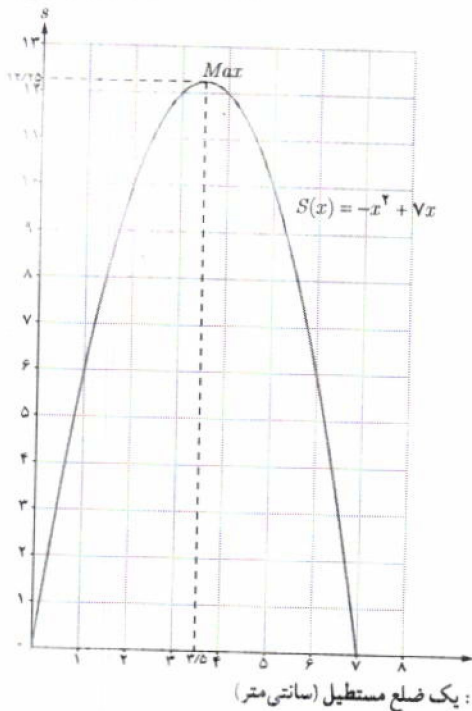
$$S(x) = -x^2 + 7x, \quad x \in [0, 7]$$

از آنجا که S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشه معادله $S'(x) = 0$ را بیابیم.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5 \quad (\text{طول نقطه بحرانی تابع})$$

جدول تغییرات تابع S در بازه موردنظر به شکل زیر است:

مساحت مستطیل (سانتی‌متر مربع)



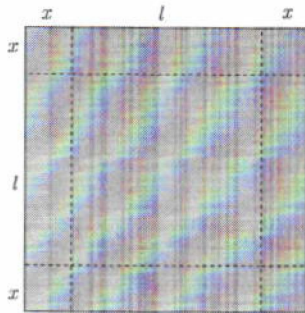
x	۰	۳/۵	۷
$S'(x) = -2x + 7$		+	-
$S(x) = -x^2 + 7x$	۰	↗ ۱۲/۲۵ ↘	۰
		ماکزیمم مطلق	

از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، $12/25$ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی $3/5$ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع $3/5$ سانتی‌متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطه ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

تذکره: در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطه

نقطه اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به دست می‌دهد. اما همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.





مثال ۲: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه‌درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل: ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعده آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است:

$$V = x \cdot l^2$$

باید l را بر حسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x, x \in [0, 15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 & (\text{نقطه بحرانی تابع } V) \\ x=15 \notin (0, 15) \end{cases}$$

جدول تغییرات تابع V در بازه مورد نظر به صورت زیر است:

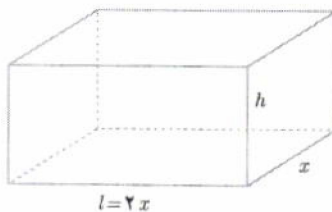
x	۰	۵	۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$		+	-
$V(x)$	۰	۲۰۰۰	۰

↑ ماکزیمم مطلق ↓

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل مورد نظر، $2000 \text{ (cm}^3\text{)}$ است که به ازای $x = 5 \text{ (cm)}$ حاصل می‌شود.

مثال ۳: می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن 10 m^3 بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع 100 هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع 60 هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل: لازم است هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$C = 100(x \cdot l) + 60[2xh + 2lh]$$

$$= 100xl + 120h(x + l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x)$$

$$C = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

$$\text{حجم مخزن: } V = 10 \text{ (m}^3\text{)} \Rightarrow x \cdot l \cdot h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad (2)$$



با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$C(x) = 2000x^2 + 360x\left(\frac{5}{x^2}\right) \Rightarrow C(x) = 2000x^2 + \frac{1800}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع $C(x)$ را به دست می آوریم :

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 4000x - \frac{1800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4000x^3 - 1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 4000x^3 - 1800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4/5} = 1/65(m) \quad (C \text{ تابع بحرانی})$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C ، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x) = \frac{4000x^3 - 1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(4000x^3 - 1800)$ است. چرا؟

x	۰	$\sqrt[3]{4/5}$	$+\infty$
$C'(x)$		-	+
$C(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow

$= 1635$
مینیمم مطلق C

از جدول دیده می شود که اگر عرض قاعده مخزن برابر $\sqrt[3]{4/5} = 1/65(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱,۶۳۵,۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴: غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل: ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به دست می آوریم.

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

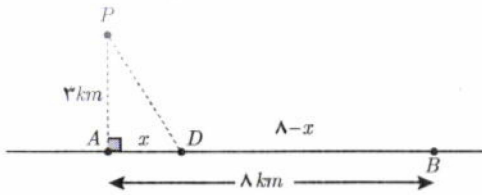
$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} = 2/38 \text{ (ساعت)} \quad (C \text{ تابع بحرانی})$$

در $C'(t)$ ، علامت مخارج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	۰	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$
$C'(t)$		+	-
$C(t)$	۰	\nearrow	\searrow

$= 0/18$
ماکزیمم مطلق C

با توجه به جدول، دیده می شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = 2/38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.



مثال ۵: آرمان درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک‌ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A ، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی آرمان در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده‌روی کند؟

حل: نقطه‌ای از ساحل را که آرمان پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطه $x=vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$t_1 = \frac{PD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9}$$

زمان پارو زدن مسیر P تا D

$$t_2 = \frac{DB}{4} = \frac{8-x}{4} = 2 - \frac{1}{4}x$$

زمان پیاده‌روی مسیر D تا B

$$t = t_1 + t_2$$

زمان کل رسیدن از P به B

$$t(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9} + \left(2 - \frac{1}{4}x\right) \quad x \in [0, 8]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطه بحرانی t را به دست می‌آوریم.

$$t'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1.732 \text{ (km)}$$

جدول تغییرات $t(x)$ به صورت زیر است:

x	۰	$\sqrt{3}$	۸
$t'(x)$	-	۰	+
$t(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8 + 3\sqrt{3}}{4} \approx \frac{3}{3}$	$\frac{\sqrt{73}}{2} \approx \frac{4}{27}$
بر حسب ساعت		مینیمم مطلق t	

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A ، برابر $\sqrt{3} \approx 1.732$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیم شود.
 حل: باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

حجم استوانه $1 \text{ (lit)} = 1000 \text{ cm}^3$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000 \text{ (cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده: $S =$ مساحت کل استوانه



$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ مینیم می‌گردد.

$$S'(r) = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{2\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

$$S(r) = \frac{2000}{\frac{1000}{\pi}} + 2\pi \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2} = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$$

r	0	$\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$	$+\infty$
S'	-	0	+
S	$+\infty$	$4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$	$+\infty$

همچنین در باز $S(r) = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$

$$S'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$S\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi \left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$$

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^3$ تومان است. همچنین کلیه هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر 800000 تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

هزینه t ساعت حرکت: $C = 800000t + (320v^3)t$

هزینه x کیلومتر حرکت: $C = 800000\left(\frac{x}{v}\right) + (320v^3)\left(\frac{x}{v}\right)$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$

نقطه بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

$$C'(v) = 0 \Rightarrow -\frac{800000}{v^2} + 320 = 0 \Rightarrow 320v^2 = 800000 \Rightarrow v^2 = \frac{800000}{320} = 2500 \Rightarrow v = \sqrt{2500} = 50$$

v	0	50	$+\infty$
$C'(v)$	-	0	+
$C(v)$	$+\infty$	min	$+\infty$

گروه ریاضی دوره سوم
استاد خورشید

$$\begin{array}{c}
 \frac{y}{x} \quad \frac{10}{-5} \\
 \hline
 P'(y) \quad | \quad - \quad | \quad + \\
 \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad \text{min}
 \end{array}$$

۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.
 $x - y = 10 \rightarrow x = 10 + y$
 $P = xy = y(10 + y) = y^2 + 10y$ $P' = 2y + 10$ $P' = 0 \rightarrow y = -5$ $x = 10 + (-5) = 5$

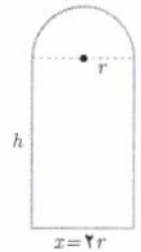
۴ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهناي مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.
 حل: باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط} = 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم دایره + مساحت مستطیل = S

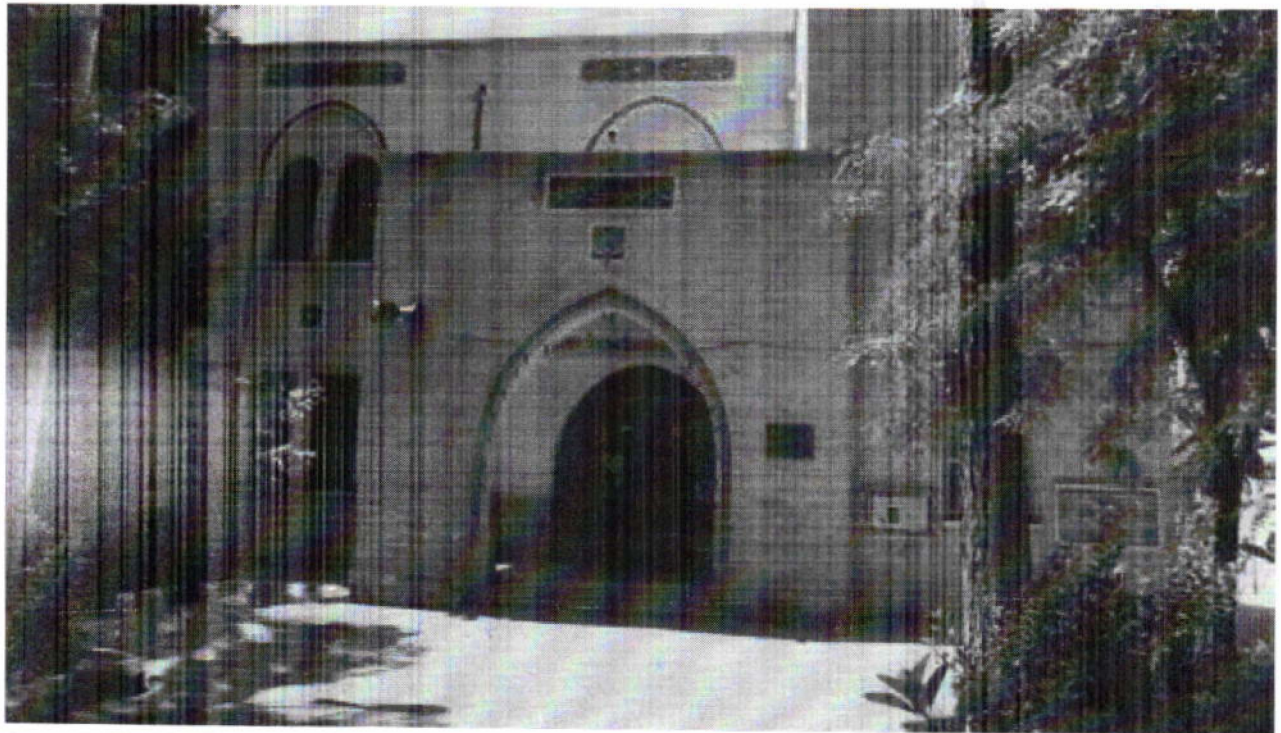
$$S = xh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r\left(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S(r) = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r^2 + \frac{9}{2}r$$



با پیدا کردن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

$$\begin{array}{c}
 S'(r) = 2r\left(\frac{\pi+4}{2}\right) + \frac{9}{2} \quad S'(r) = 0 \Rightarrow \frac{r}{\pi+4} \\
 -r(\pi+4) = -\frac{9}{2} \rightarrow r = \frac{4.5}{\pi+4} \\
 \text{نسبت به } r \text{ درجه اول است}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{r}{\pi+4} \quad \frac{4.5}{\pi+4} \\
 \hline
 S'(r) \quad | \quad + \quad | \quad - \\
 \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad \text{max}
 \end{array}$$



دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس: ۱۳۱۷، مساحت: ۲/۵ هکتار)

۱ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای

شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

$$C(x) = 2x \times 2000000 + 2y \times 8000000$$

$$C(x) = 4000000x + 16000000 \left(\frac{10000}{x}\right)$$

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

$$C'(x) = 4 \times 10^6 - \frac{16 \times 10^6}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16 \times 10^6}{4 \times 10^6} = 4$$

$$x = 2 \rightarrow y = \frac{10000}{2} = 5000$$

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟



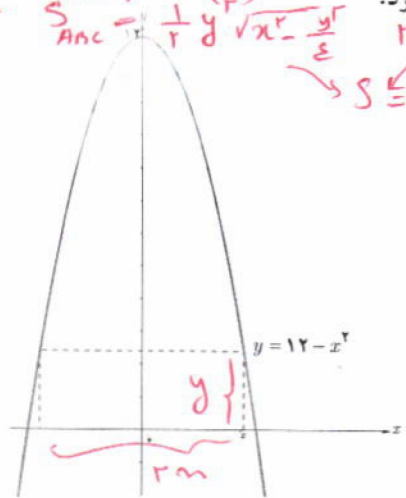
$$AH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$S_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.



$$S = (2m)y = 2x(12 - x^2)$$

$$S(m) = 24x - 2x^3$$

$$S'(m) = 24 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

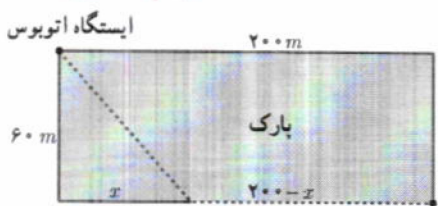
x	-2	0	2
$S'(x)$	$-$	$+$	$-$
$S(x)$			$-\frac{16}{3}$

۴ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه 2 cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

$$S = (n+2)(y+2) = \left(\frac{32}{n} + 2\right)(n+2)$$

$$S(m) = 4n + \frac{72}{n} + 4 \rightarrow S'(m) = 4 - \frac{72}{n^2} = 0 \rightarrow n^2 = 18 \rightarrow n = \pm 3\sqrt{2} \rightarrow n = 3 \rightarrow y = 8$$

۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در 200 متری غرب و 60 متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت 3 متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت 2 m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



موقعیت فعلی آروین

x	-60	0	60
$S'(x)$	$+$	$-$	$+$
$S(x)$			$\frac{1}{2} \times 60^2$

کوره را طی دوره دوم
استان خورستان

پیاموز | Biamoz.com

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع

شامل انواع | نمونه سوالات | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |

ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

اینستاگرام

گروه تلگرام

کانال تلگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن کلیک کنید

دبستان

اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
-----	-----	-----	-------	------	-----

متوسطه اول

هفتم	هشتم	نهم
------	------	-----

متوسطه دوم

دهم	یازدهم	دوازدهم
-----	--------	---------