فصل اول (درس دوم)

به پدیده ها یا آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطعی مشخص نیست، پدیده یا آزمایش **تصادفی** می گویند. در پدیده های **تصادفی** از همه نتیجه های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام پدیده قطعا رخ می دهد اطلاع نداریم.

مثال: تعیین رنگ یک مهره خارج شده از کیسه ای که شامل ۵ مهره قرمز و ۱ مهره سبز باشد

- ✓ به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، **برآمد** می گوییم.

به آزمایش هایی که نتایج آن قبل از اجرا قطعا مشخص است، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گویند.

مثال: فرو رفتن سنگ در آب بعد از پرتاب آن.

کار در کلاس

۱- کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش آموزی که سن او بیش از ده سال باشد، در کلاس پایه دوازدهم؛ **قطعی**

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ **تصادفی**

پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ **قطعی**

ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛ **تصادفی**

ث) در یک بازی بین دونفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا می توان قبل از بازی نفر برنده را مشخص کرد؟ **تصادفی**

۲- از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار ، مداد }می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟ **خیر**

ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

حل: باید به نوعی اشیا یکسان را با علامت گذاری متمایز کنیم تا بتوانیم همه برآمدها را مشخص کنیم. (مثلاً می توانیم شماره گذاری کنیم.

{خودکار ۵ و خودکار ۴ و خودکار ۳ و خودکار ۲ و خودکار ۱ و مداد ۳ و مداد ۲ و مداد ۱}

فضای نمونه

همه برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن **فضای نمونه** می گوییم و آن را با حرف S نشان می دهیم.

مثال: یک تاس بعد از پرتاب یکی از برآمدهای ۱ تا ۶ را دارد. بنابراین در پرتاب یک تاس فضای نمونه برابر است با : $S =$ { ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ }

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش های تصادفی را بنویسید.

۱- پرتاب دو سکه با هم.

حل: ۴=$۲^۲$

$$S=\{(ر,ر),(ر,پ),(پ,ر),(پ,پ)\}$$

۲- پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار).

حل: ۸=$۲^۳$

$$S=\{(ررر)(پ پ پ)(ر پ پ)(پ ر پ)(ر ر پ)(پ پ ر)(ر پ ر)(پ ر ر)\}$$

۳- پرتاب یک تاس و یک سکه با هم.

حل: ۱۲=۲×۶

$$S=\{(ر,۱)(ر,۲)(ر,۳)(ر,۴)(ر,۵)(ر,۶)$$
$$(پ,۱)(پ,۲)(پ,۳)(پ,۴)(پ,۵)(پ,۶)\}$$

کار در کلاس

۱- برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز جدول زیر را کامل کنید سپس به کمک اصل ضرب درستی تعداد کل حالت های موجود را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱ ,۱)	(۱ ,۲)				(۱ ,۶)
۲	(۲ ,۱)	(۲ ,۲)				
۳			(۳ ,۳)		(۳ ,۵)	
۴				(۴ ,۴)		
۵			(۵ ,۳)			
۶						(۶ ,۶)

۲- سه دوست در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

حل:

$s = \{$ (م،پ،ع) (پ،م،ع) (پ،ع،م) (ع،پ،م) (ع،م،پ) (م،ع،پ) $\}$

چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن مشخص کرد؟

حل:

اگر نخواهیم بدون شمردن و نوشتن تک تک برآوردها تعداد کل برآوردها را حساب کنیم، می توانیم تعداد کل جایگشت های ۳ شیء متمایز را محاسبه کنیم که می شود **۶=!۳** یعنی ۶ برآورد مختلف می توانیم داشته باشیم.

۳- در کیسه ای ۳ مهره قرمز، ۴مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد . به طور تصادفی ۳ مهره را از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

چون مسئله تنها برآمدهای ممکن (تعداد اعضای فضای نمونه) را از ما خواسته است پس می توانیم بدون نوشتن تک تک برآمدها و با استفاده از **فنون شمارش** که در درس اول آموختیم تعداد برآمدهارا مشخص کنیم. چون در مجموع ۱۱ مهره در کیسه داریم بنابراین باید تعداد **ترکیب** های ۳تایی از میان ۱۱ شیئ مختلف را حساب کنیم.

$$\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{(۱۱-۳)!\times ۳!}=\frac{۱۱!}{۸!\times ۳!}=\frac{۱۱\times ۱۰\times ۹\times \cancel{۸!}}{\cancel{۸!}\times ۳\times ۲\times ۱}=۱۶۵ \Rightarrow n(s)=۱۶۵$$

پیشامد

مجموعه A را زیر مجموعه B می گوییم . هر گاه هر عضو از مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد؛ در این صورت می نویسیم $A \subset B$.

برای مثال:

$\{۱،۲،۳\}\subset\{،۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$

- ✓ می دانیم $A \subset A$ ؛ یعنی هر مجموعه ای زیر مجموعه **خودش** است. مجموعه **تهی** ، زیرمجموعه **همه مجموعه** هاست. یعنی $\emptyset\subset A$

مثال ۱ :

تمام زیر مجموعه های $A = \{a. b. c\}$ را بنویسید.

حل:

$\phi, \{a\} , \{b\} ,\{c\} ,\{a , b\} , \{a , c\}, \{b , c\} , \{a , b , c\}$

مثال ۲ : در پرتاب یک تاس پیشامد های زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچکتر از ۷ ظاهر شود

حل:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

ب) عدد بزرگ تر از ۷ ظاهر شود

حل:

$A = \{\ \}$

یا$\emptyset$

- ✓ به هر یک از زیر مجموعه های فضای نمونه S یک **پیشامد** می گویند.
- ✓ از آنجا که $\emptyset \subset S$ پس $\emptyset$ یک پیشامد روی S است که به آن پیشامد غیرممکن (نشدنی) می گویند.
- ✓ $S \subseteq S$ است پس S نیز یک پیشامد است که به آن پیشامد **حتمی** می گویند.
- ✓ به دسته ای از اشیاء که متمایز و کاملا مشخص باشند **مجموعه** میگوییم.

برای مثال مجموعه کتاب های درسی پایه دوازدهم انسانی.

- ✓ تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی از فرمول 2^n به دست می آید.

برای مثال یک مجموعه ۳ عضوی 2^3 یعنی ۸ زیر مجموعه دارد.

کار در کلاس

۱- سکه را یک بار پرتاب می کنیم؛ می دانی $S = \{$پ،ر$\}$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

حل: هر پیشامد یک زیر مجموعه ای از S است.

{پ} {ر} {ر،پ} $\emptyset$

۲- سه دوست پول هایشان را روی هم گذاشتند و کتابی خریدند. سپس ، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و درون کیسه ای انداختند. قرار بر این شد که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه های یک عضوی S را مشخص کنید.

حل: ۸=۲^۳

$S = \{$سوگند،ملیکا،مریم$\}$

{مریم} {ملیکا} {سوگند} {ملیکا،مریم} {سوگند،ملیکا} {مریم،سوگند} {ملیکا،مریم،سوگند}

{ }

۳- تاسی را پرتاب می کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامد های زیر رخ داده اند؟

الف)

$A = \{۳.۲.۵\}$

ب)

$B = \{۲\}$

پ)

$C = \{۲.۴.۶\}$

حل:

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است **یکی از برآمد های آن** در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

پیشامد های $A\ B\ C$ هرسه رخ دادند زیرا عدد ۲ یکی از برآمد های هر ستای آنها است.

اما برای مثال پیشامد $E = \{۳\ ۴\ ۵\}$ رخ نداده زیرا **E ∌ ۲**

۴- دو تاس را پرتاب می کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

حل:

{(۶و۶) (۵و۵) (۴و۴) (۳و۳) (۲و۲) (۱و۱)}

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

حل:

{(۱و۶) (۲و۵) (۳و۴) (۴و۳) (۵و۲) (۶و۱)}

- ✓ اگر دو جزء آزمایش **هم جنس** باشند **باید** جا به جایی هر عضو را انجام دهیم مثل سوال بالا، هر دو جزء هم جنس بودند (هر دو تاس بودند) ولی اگر مثلا یک تاس و یک سکه را پرتاب کنیم دیگر در پیشامد خواسته شده، **نباید** جای اعضای زوج مرتب ها را عوض کنیم مثلا وقتی (۱،ر) را نوشتیم دیگر **نباید** (ر،۱) را بنویسیم.

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳۰ باشد.

حل:

این پیشامد هیچ عضوی ندارد یعنی $\emptyset$ است.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

حل:

این پیشامد شامل تمام اعضای S است زیرا حداکثر حاصل ضرب اعداد روی دو تاس برابر ۳۶ می شود؛ بنابراین این پیشامد همان S است.

۵- در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) ۳ نفر دانش آموزان پیشتاز ا سه پایه مختلف باشند.

حل:

$$n(A)=\overset{\text{دهم}}{\binom{5}{1}}\times\overset{\text{یازدهم}}{\binom{6}{1}}\quad\overset{\text{دوازدهم}}{\binom{4}{1}}=5\times 6\times 4=120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

حل:

چون قرار است حداقل ۲ نفر از دانش آموزان پیشتاز ، یازدهمی باشند.این مطلب به آن معنی است که ۲یا ۳ نفر یازدهمی در گروه پیشتاز داشته باشیم:

$$\underset{\text{یازدهم}}{\binom{6}{2}}\overset{\text{و}}{\times}\binom{9}{1}\overset{\text{یا}}{+}\underset{\text{یازدهم}}{\binom{6}{3}}\binom{9}{0}=\frac{6!}{2!\,4!}\times 9+\frac{6!}{3!\times 3!}\times 1=\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{2\times \cancel{4!}}\times 9+\frac{6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{3!}}\times 1=135+20=155$$