

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 20|A|^2 - 5|A| \rightarrow 20|A|^2 - 6|A| = 0 \rightarrow 2|A|(10|A|^2 - 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^2 - 3 = -3 \\ |A| = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow |A|^2 - 3 = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 3 \\ \rightarrow |A|^2 - 3 = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 3 \end{cases} \end{cases}$$

۲- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  یک ماتریس  $3 \times 2$  مانند  $C$  را طوری پیدا کنید که  $A + B - C = O_{3 \times 2}$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A + B - C = O_{3 \times 2} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = C$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

۳- قضیه ۱ را ثابت کنید.

پاسخ:

اثبات ۱:

اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  باشند داریم:

$$\begin{cases} A + B = [d_{ij}]_{m \times n}, d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ B + A = [d'_{ij}]_{m \times n}, d'_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \end{cases} \Rightarrow d_{ij} = d'_{ij} \Rightarrow [d_{ij}]_{m \times n} = [d'_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A + B = B + A$$

اثبات ۲: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ,  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  باشند داریم:

$$A + B = [d_{ij}]_{m \times n} = D \quad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$B + C = [d'_{ij}]_{m \times n} = D' \quad d'_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

$$A + (B + C) = A + D' = [a_{ij}]_{m \times n} + [d'_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + d'_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$$

$$(A + B) + C = D + C = [d_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$$

با مقایسه روابط فوق می یابیم:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

اثبات ۳: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\bar{O} = [e_{ij}]_{m \times n}$  باشد می دانیم  $e_{ij} = 0$  است.

$$A + \bar{O} = [a_{ij}]_{m \times n} + [e_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + e_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

اثبات ۴: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  باشد می دانیم  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$  است.

$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = \bar{O}$$

اثبات ۵:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rB = [rb_{ij}]_{m \times n}$$

$$rA + rB = [ra_{ij} + rb_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

از طرفی

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\Rightarrow r(A + B) = r[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

با مقایسه روابط فوق می توان فهمید  $r(A + B) = rA + rB$

اثبات ۶:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow (r + s)A = (r + s)[a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [(r + s)a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij} + sa_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n} + [sa_{ij}]_{m \times n}$$

$$= r[a_{ij}]_{m \times n} + s[a_{ij}]_{m \times n} = rA + sA$$

اثبات ۷:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow (rs)A = (rs)[a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [(rs)a_{ij}]_{m \times n} = [r(sa_{ij})]_{m \times n} = r[sa_{ij}]_{m \times n} = r(sA)$$

اثبات ۸:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow 1 \times A = 1 \times [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [1 \times a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

۴- اگر  $CA = C, AC = A, AB = BA = O$  نشان دهید  $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$AB = BA = O \Rightarrow$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow AB = BA = \bar{O}$$

$$AC = A \Rightarrow AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow AC = A$$

$$CA = C \Rightarrow CA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow CA = C$$

۵- فرض کنید  $d, c, b, a$  چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

بنابراین، یک واحد از  $a$ ، شش واحد از  $c$  است، یک واحد از  $b$  هشت واحد از  $d$  است، و یک واحد از  $c$  نصف واحد از  $b$  است. این جدول را به عنوان یک

ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا  $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$ . آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم  $A^2$  را پیدا کنید؟

پاسخ:

می دانیم اگر هر واحد از  $a$  مساوی  $m$  واحد از  $b$  باشد پس  $a = mb$  ضمناً اگر هر واحد از  $b$  مساوی  $n$  واحد از  $c$  باشد پس  $b = nc$  حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از  $a$  مساوی  $mn$  واحد از  $c$  است

$$\begin{cases} a = mb \\ b = nc \end{cases} \Rightarrow a = (mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال  $a_{12}$  یعنی هر واحد از  $a$  مساوی چند واحد از  $b$  است. و  $a_{24}$  یعنی هر واحد از  $b$  چند واحد از  $d$  است بنابراین  $a_{12} \times a_{24}$  یعنی هر واحد از  $a$  چند واحد از  $d$  است که این همان مقدار  $a_{14}$  می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت  $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$  حال با توجه به رابطه فوق اگر  $[m_{ij}]_{4 \times 4} = A^2$  باشد

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^4 a_{ij} = 4a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های  $A$  را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های  $A^2$  ایجاد شوند.

۶- کارخانه ای سه محصول  $a, b, c$  را به دو بازار  $n, m$  می فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نمایش داده شده است. ماتریس های  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$  به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از  $a, b, c$  را نشان می دهند. درآیه های هر

یک از ماتریس های  $AB - AC, AC, AB$  را تعبیر کنید.

پاسخ:

$$AB = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار  $m$  را نشان می دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار  $n$  را نشان می دهد.

$$AC = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار  $m$  و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار  $n$  می باشد.

$$AB - AC = \begin{bmatrix} 22500 \\ 19000 \end{bmatrix}$$

می دانیم سود یعنی از قیمت فروش تمام شده را کم می کنیم پس ۲۲۵۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار  $m$  و عدد ۱۹۰۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار  $n$  را نشان می دهد.

$$7- \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ نشان دهید } A^2 - 4A - 5I_3 = O$$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$${}^r A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad {}^d I_{\psi} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^r - {}^r A - {}^d I_{\psi} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۸-اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  مطلوب است محاسبه ی  $A^{10}$ .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^r = I \Rightarrow (A^r)^2 = I^2 \Rightarrow A^{10} = I$$

۹-اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه ی توان های مختلف  $A$ ، نشان دهید عدد طبیعی  $n$  موجود است که  $A^n = O$ .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = 0 \Rightarrow n = 3$$

در اینجاست ماتریس  $A$  را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۱۰- به کمک تمرین قبل  $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{600}$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$A = r \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{r} & -\frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{\sqrt{3}}{r} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} \Rightarrow A = r R_{\frac{\pi}{6}}$$

$$R_{\theta}^n = R_{n\theta} \Rightarrow A^{600} = r^{600} \times R_{r^{600} \times \frac{\pi}{6}} = r^{600} \times \underbrace{R_{100\pi}}_{R_{\pi}} = r^{600} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = r^{600} I = \begin{bmatrix} r^{600} & 0 \\ 0 & r^{600} \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$  مقدار  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها و ستون ها پیدا کنید. همچنین  $|A|$  را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

پاسخ:

سطر اول:

$$1 \times (2 - 15) - 5(-4 - 12) + 7(10 + 4) = -13 + 80 + 98 = 165$$

سطر دوم:

$$-2(-10 - 35) + (-1)(-2 - 28) - 3(5 - 20) = 90 + 30 + 45 = 165$$

سطر سوم:

$$+4(15 + 7) - 5(3 - 14) + (-2)(-1 - 10) = 165$$

ستون اول:

$$+1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = 165$$

ستون دوم:

$$-5(-4 - 12) + (-1)(-2 - 28) - 5(3 - 14) = 165$$

ستون سوم:

$$+7(10 + 4) - 3(5 - 20) - 2(-1 - 10) = 165$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 60 + 70) - (-28 - 20 + 15) = 132 + 33 = 165$$

۱۲- قضیه ی ۲ را ثابت کنید.

پاسخ:

باید  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  قرار دهیم  $|A|, |B|$  را با بسط بیابیم و در یکدیگر ضرب کنیم سپس ماتریس  $AB$  را تشکیل دهیم و دترمینان آن را نیز با بسط بیابیم پس از مقایسه آنها خواهیم داشت  $|AB| = |A| \times |B|$

۱۳- فرض کنید بتوان یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  را به صورت حاصلضرب یک ماتریس  $3 \times 2$  در یک ماتریس  $2 \times 3$  نوشت. ثابت کنید  $|A| = 0$ .

پاسخ:

فرض کنیم  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$  در این صورت داریم:

$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

۱۴- فرض کنید  $\lambda, \mu$  دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی های دترمینان ها، مقدار دترمینان ماتریس  $A = [\lambda i + \mu j]_{3 \times 3}$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + 2\mu & \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + 2\mu & 2\lambda + 3\mu \\ 3\lambda + \mu & 3\lambda + 2\mu & 3\lambda + 3\mu \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول را به سطر سوم اضافه می کنیم}} \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + 2\mu & \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + 2\mu & 2\lambda + 3\mu \\ 4\lambda + 2\mu & 4\lambda + 4\mu & 4\lambda + 6\mu \end{vmatrix} = 0$$

اگر در یک ماتریس، دو سطر مساوی داشته باشیم دترمینان آن ماتریس مساوی صفر است.

۱۵- اگر  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$  روؤس یک مثلث از صفحه ی

$\mathbb{R}^2$  باشند، ثابت کنید مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با قدر مطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

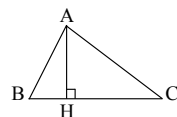
پاسخ:

برای پیدا کردن مساحت مثلث  $ABC$  باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع  $AH$  یعنی فاصله  $A$  از خط  $BC$

ابتدا معادله خط  $BC$  را می نویسیم.

$$\begin{cases} B(b_1, b_2) \\ C(c_1, c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \\ y - b_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} (x - b_1) \Rightarrow (y - b_2)(c_1 - b_1) = (c_2 - b_2)(x - b_1) \end{cases}$$



$$|AH| = \frac{|(a_2 - b_2)(c_1 - b_1) - (c_2 - b_2)(a_1 - b_1)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}} = \frac{|a_1(b_2 - c_2) - b_1(a_2 - c_2) + c_1(a_2 - b_2)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}}$$

$$|BC| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2} \text{ از طرفی}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AH| \times |BC| = \frac{1}{2} |a_1(b_r - c_r) - b_1(a_r - c_r) + c_1(a_r - b_r)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_r & b_r & c_r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_r - c_r) - b_1(a_r - c_r) + c_1(a_r - b_r)$$

بنابراین نصف این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۱۶- نشان دهید  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$  معادله ی خطی است که از نقاط  $(c,d), (a,b)$  در  $\mathbb{R}^2$  می گذرد.

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +x(b-d) - y(a-c) + 1(ad-bc) = 0$$

$$\Rightarrow AX + By + C = 0$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می کنیم

$$A(a,b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

$$B(c,d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه  $B(c,d), A(a,b)$  عبور می کند.

۱۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد، حاصل  $A^3$  را به دست آورید.  
چه نتیجه ای می گیرید؟

پاسخ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix} \text{ نتیجه می گیریم اگر } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

۱۸- دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \underbrace{(4 - 9 - 8)}_{-13} - \underbrace{(3 - 12 - 8)}_{-17} = 4$$

۱۹- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$  را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_0 - e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_0 + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_0 = 0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۲۰- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  به طوری که برای  $i = j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i + j$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i^2$  در این صورت ماتریس  $A$  را مشخص کنید.

پاسخ:

$$a_{ij} = \begin{cases} 7 & i = j \\ i + j & i > j \\ i^2 & i < j \end{cases}$$

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۲۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $x+y+z$  را بیابید.

پاسخ:

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 & \rightarrow x=2 \\ 2x+y=5 & \rightarrow y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x+y+z = 2+1+(-2) = 1$$

۲۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریسی قطری باشد.

پاسخ:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$-8+2a = 0 \rightarrow a = 4$$

$$b-3 = 0 \rightarrow b = 3$$

۲۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^3$  و  $A^7$  را بیابید.

پاسخ:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\times A} A^3 = A$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} A^6 = I \xrightarrow{\times A} A^7 = A$$

۲۴- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $3 \times 3$  و تعویض‌پذیر باشند  $(A \times B = B \times A)$  ثابت کنید.

الف)  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب)  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

پاسخ:

الف)  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$\xrightarrow{AB=BA} A^2 + 2AB + B^2$$

ب)  $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 \xrightarrow{AB=BA} A^2 - B^2$

۲۵- با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی  $AB = AC$

نمی‌توان نتیجه گرفت  $B = C$ .

پاسخ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}_C$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید  $AB = AC$  اما  $B \neq C$  می‌باشد.

۲۶- دو ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  مثال برنید که  $A \neq \bar{0}$  و  $B \neq \bar{0}$  ولی  $AB = \bar{0}$ .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۷- وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت وارون  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید. بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۲۸- نشان دهید ماتریس  $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است.

پاسخ:

کافیست نشان دهیم:  $AB = BA = I$ .

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۲۹- قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

پاسخ:

فرض می‌کنیم ماتریس‌های  $B$  و  $C$  هر دو وارون  $A$  باشند؛ ثابت می‌کنیم:  $B = C$ .

$$\text{فرض فرض: } AB = BA = I$$

$$\text{فرض فرض: } AC = CA = I$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

۳۰- دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

۳۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $3A^{-1} - 2B^{-1}$  را بیابید.



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 3B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{15}{17} & -\frac{6}{17} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A^{-1} - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + \frac{3}{17} & -\frac{3}{7} - \frac{9}{17} \\ -\frac{2}{7} + \frac{15}{17} & \frac{4}{7} + \frac{6}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{106}{119} & -\frac{114}{119} \\ \frac{71}{119} & \frac{110}{119} \end{bmatrix}$$

۳۲- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب دستگاه بوده و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$  ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} + \frac{50}{26} \\ -\frac{2}{13} + \frac{30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{26} \\ \frac{26}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

۳۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ماتریس  $A^{-1}$  را به دست آورده و  $|A|$  را با  $|A^{-1}|$  مقایسه کنید.

پاسخ:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$|A| = (5 \times 2) - (3 \times 2) = 10 - 6 = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۳۴- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \frac{3}{2} \neq -\frac{5}{1}$$

پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}}_B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} + \frac{40}{13} \\ \frac{2}{13} + \frac{24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{13} \\ \frac{26}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

۳۵- به ازای چه مقادیری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

پاسخ:

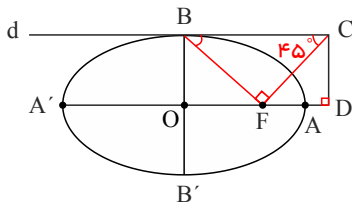
شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2} \rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

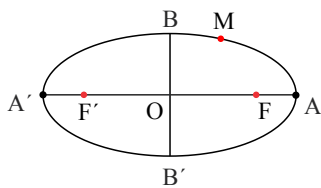
۱- در بیضی مقابل  $AA'$  و  $BB'$  در قطراند. خط  $d$  در نقطه  $B$  بر بیضی مماس است. پاره خط  $BF'$  را رسم می‌کنیم و در نقطه  $F'$  عمودی بر  $BF'$  رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقطه  $C$  قطع کند و از  $C$  عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند  $D$  قطع کند. اگر  $\widehat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار  $\frac{AD}{AF}$  را به دست آورید.



۲- دو نقطه  $A$  و  $B$  روی یک بیضی و  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی‌اند.  $A$  به کانون  $F'$  نزدیک‌تر و  $B$  به کانون  $F$  نزدیک‌تر است. اگر  $AF' = BF$  باشد، نشان دهید:

(الف) در حالتی که دو پاره خط  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند باهم موازی‌اند.  
 (ب) در حالتی که  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کنند مثلث  $FMF'$  متساوی‌الساقین است و  $M$  روی قطر کوچک بیضی است.

۳- نقطه  $M$  روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



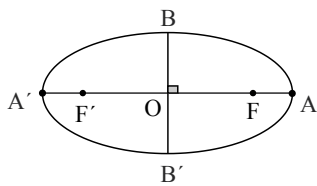
(الف) نشان دهید  $OM = OF = OF'$ .

(ب) نشان دهید مثلث  $MF'F$  قائم‌الزاویه است.

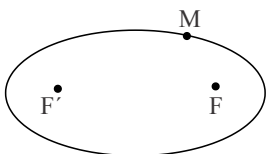
(ت) طول‌های  $MF$  و  $MF'$  را به دست آورید.

$OA = 5, OB = 3, OF = 4$

۴- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه  $FBF'$  چند درجه است؟



۵- در شکل مقابل نقطه  $M$  روی بیضی و کانون‌های  $F$  و  $F'$  مشخص شده‌اند. خط  $d$  را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه  $F'$  خطی موازی با  $MF$  رسم کنید تا خط  $d$  را در نقطه‌ای مانند  $N$  قطع کند. ثابت کنید:  $MF' = MF$



۶- ثابت کنید اگر  $M$  نقطه‌ای درون بیضی باشد آن‌گاه مجموع فواصل  $M$  از دو کانون کمتر از  $2a$  است.

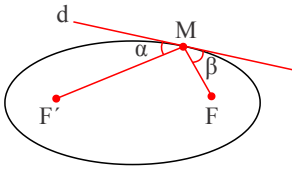
۷- ثابت کنید اگر  $M$  نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آن‌گاه مجموع فواصل  $M$  از دو کانون بیشتر از  $2a$  است.

۸- فرض کنیم خط  $d$  مانند شکل مقابل در نقطه  $M$  بر بیضی مماس است.

۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط  $d$  نسبت به دو کانون  $F$  و  $F'$  کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲- دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- اگر بدنه داخلی بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

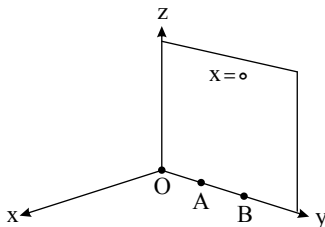


۱- الف) مختصات چند نقطه را مشخص کنید که در رابطه  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  صدق کنند و مکان آن‌ها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

ب) نمودار مربوط به معادلات  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله  $x=0$  دارد؟

پاسخ:

الف) مختصات چند نقطه که در رابطه  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  صدق کنند عبارتند از:  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 1, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  و مکان آن نقاط طبق شکل مقابل روی محور  $yz$  است.



ب) نمودار معادله  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  یک خط (همان محور  $yz$ ) است.

$x=0$  معادله صفحه‌ای شامل محور  $yz$  است. (صفحه  $x=0$  همان صفحه  $yz$  است).

۲- چهار نقطه  $A(2, 1, 3)$  و  $B(-1, 1, 3)$  و  $C(2, -1, 3)$  و  $D(-1, -1, 3)$  مفروضند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود به چهارضلعی  $ABCD$  را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح  $ABCD$  هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

پاسخ:

الف)  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(-1, 1, 3)$ ,  $C(2, -1, 3)$ ,  $D(-1, -1, 3)$

حدود تغییرات طول نقاط، بین  $-1$  و  $2$  و حدود تغییرات عرض نقاط، بین  $-1$  و  $1$  بوده و چهارضلعی  $ABCD$  به ارتفاع ۳ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

ب) این صفحه، ۲ واحد پایین‌تر از چهارضلعی  $ABCD$  است.  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$

۳- اگر معادلات وجه‌های یک مکعب مستطیل به صورت  $x=1$ ,  $x=3$ ,  $xy=1$ ,  $xy=4$ ,  $yz=2$  و  $z=-2$  باشد،

الف) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ب) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

پ) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار گرفته باشند.

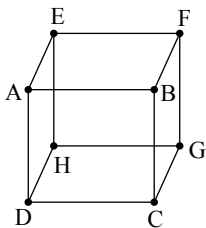
ت) معادلات مربوط به یال‌های  $AB$  و  $BF$  را بنویسید. (دقت کنید یال‌ها پاره‌خط‌اند).

ث) روابط مشخص کننده دو وجه  $ADHE$  و  $EFGH$  را بنویسید.

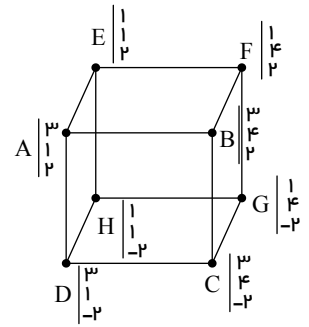
ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد.

چ) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که روی یکی از وجه‌های آن و غیره واقع بر یال‌ها باشد.

پاسخ: الف)



$$\begin{cases} ABCD \text{ وجه} : x = 3, & EFGH \text{ وجه} : x = 1 \\ ADHE \text{ وجه} : y = 1, & BCGF \text{ وجه} : y = 4 \\ CDHG \text{ وجه} : z = -2, & ABFE \text{ وجه} : z = 2 \end{cases}$$



نقطه  $A$  بر سه وجه  $ABCD$  و  $ADHE$  و  $ABFE$  قرار دارد پس مختصات  $A$  برابر است با:  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

به همین ترتیب مختصات بقیه رأس‌ها به دست آمده است.

(ب)

$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow (1, 2, 1) & , & x = 3 \rightarrow (3, 2, 0) & , & y = 1 \rightarrow (2, 1, -1) \\ y = 4 \rightarrow (2, 4, 1) & , & z = 2 \rightarrow (2, 3, 2) & , & z = -2 \rightarrow (2, 2, -2) \end{cases}$$

(پ) نقطه  $(1, 4, 1)$  فقط بر دو وجه  $x = 1$  و  $y = 4$  قرار دارد یعنی روی فصل مشترک آن‌ها یعنی روی یال  $FG$  قرار دارد.

و نقطه  $(3, 2, 2)$  فقط بر دو وجه  $x = 3$  و  $z = 2$  قرار دارد و نقطه  $(2, 4, -2)$  بر دو وجه  $y = 4$  و  $z = -2$  قرار دارد.

(ت)

$$AB \text{ خط} : \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow (AB \text{ پاره خط}) \text{ یال} : \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad BF \text{ خط} : \begin{cases} y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow BF \text{ یال} : \begin{cases} y = 4 \\ z = 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(ث)

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} : \text{وجه } EFGH \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq z \leq 2 \\ y = 1 \end{cases} : \text{وجه } ADHE$$

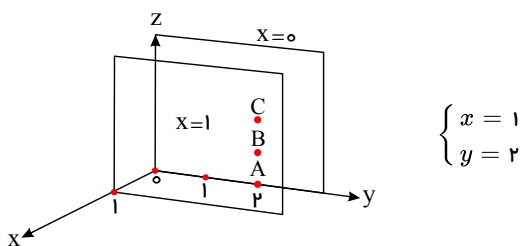
(ج)  $(2, 3, 1)$  درون مکعب قرار دارد.

(چ)  $(2, 2, 2)$  روی وجه  $z = 2$  قرار دارد که روی هیچ یالی قرار نگرفته است.

۴- بر روی صفحه  $x = 1$  نقاطی را که مؤلفه دوم آن‌ها ۲ است، مشخص نمایید و شکل حاصل از این نقاط را توصیف نمایید و معادلات مربوط به آن را

بنویسید.

پاسخ: بر روی صفحه  $x = 1$  سه نقطه مانند  $A(1, 2, 0)$ ،  $B(1, 2, 1)$  و  $C(1, 2, 2)$  که مؤلفه دوم آن‌ها ۲ است، در نظر گرفتیم. بدیهی است این نقاط روی خطی به موازات محور  $z$  قرار می‌گیرد و معادلات آن‌ها به صورت زیر است:



در واقع اگر صفحه  $y = 2$  که موازی صفحه  $xOz$  (یا  $y = 0$ ) است، رسم شود، فصل مشترک آن با صفحه  $x = 1$  همان خط مورد نظر می‌باشد.

# پیاموز | Biamoz.com

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع

شامل انواع | نمونه سوالات | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |

ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

اینستاگرام

گروه تلگرام

کانال تلگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن کلیک کنید

## دبستان

اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
-----	-----	-----	-------	------	-----

## متوسطه اول

هفتم	هشتم	نهم
------	------	-----

## متوسطه دوم

دهم	یازدهم	دوازدهم
-----	--------	---------