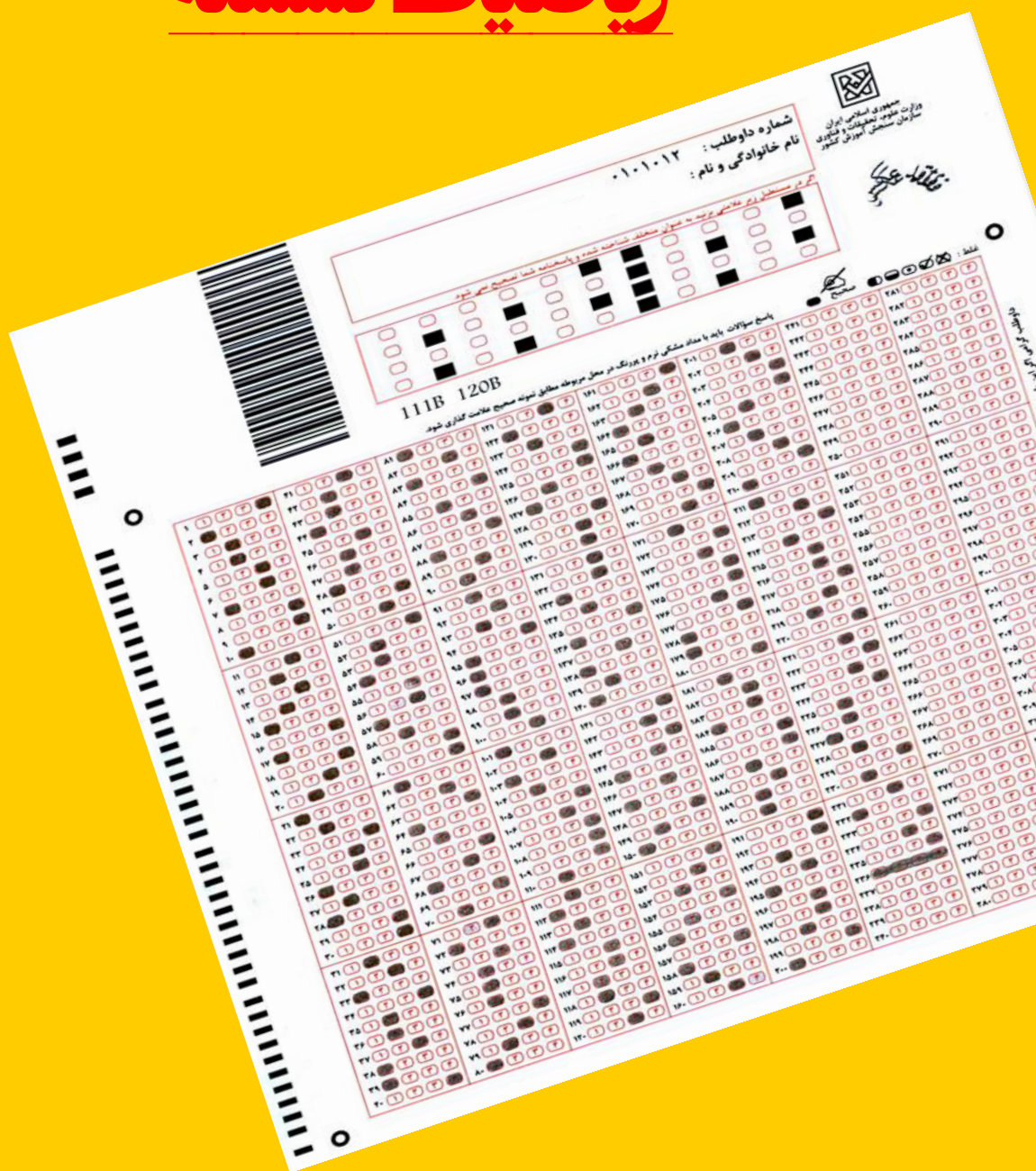


نکته و تست
ریاضیات کنکور

نمونه از جزوات کنکوری:

ریاضیات گسسته



آموزش مفهومی دروس، نکات دقیق و روش های سریع با جزوات درس آموز

درسنامه

مفاهیم درسی دقیق به همراه نکات مورد نیاز در جای خود آورده شده است.



نمونه‌های فراوان

تعداد فراوان مثال و انواع متنوعی از تست‌ها با مل و توضیحات لازم.



سؤالات کنکور

تست‌های کنکورهای سراسری تا جدیدترین دوره با توضیح و پاسخ.



بانک تست

در پایان هر بخش، تعداد مناسبی تست تمرینی مرتبط نوشته شده است.



شامل بخش پیشرفته، ویژه رتبه‌های برتر آزمون‌ها

آمادگی کنکور ریاضیات گسسته

دکتر علیرضا نورالدینی



نظریه اعداد (۲) ۳۳

هم‌نهشتی اعداد، ویژگی‌های هم‌نهشتی، تعیین باقی مانده‌ی تقسیم و بررسی بخش‌پذیری اعداد، معادله‌ی هم‌نهشتی و معادله‌ی سیاله + بخش ویژه ۱۰۰ درصدی‌ها



نظریه اعداد (۱) ۲

برخی روش‌های استدلال، روش مستقیم، روش-های غیرمستقیم بازگشتی و برهان خلف، بخش-پذیری اعداد، ب.م.م و ک.م.م اعداد + بخش ویژه ۱۰۰ درصدی‌ها



مدل‌سازی با گراف ۹۶

مفهوم احاطه‌گری و مجموعه‌های احاطه‌گر، مجموعه احاطه‌گر می‌نیمال، تعیین مجموعه احاطه‌گر می-نیم، تعیین عدد احاطه‌گری و مجموعه‌های مربوطه + بخش ویژه ۱۰۰ درصدی‌ها



گراف ۶۳

معرفی گراف و رسم، بررسی گراف‌های تهی، گراف کامل و گراف‌های منتظم، مسیرها و دور در گراف و گراف‌های دوری و مسیری + بخش ویژه ۱۰۰ درصدی‌ها



روش‌هایی در شمارش ۱۳۹

اصل شمول و عدم شمول و کاربردها، بررسی تعداد توابع بین مجموعه‌ها با شرایط مختلف، بیان و کاربردها و حالات گوناگون اصل لانه کبوتری + بخش ویژه ۱۰۰ درصدی‌ها



مباحثی در ترکیبیات ۱۱۴

تکنیک‌های ترکیبیات با تکرار و جایگشت با کلاف پیچ، نظریه دسته گل‌ها و کاربردهای آن و بررسی شرایط حداقلی، مربع‌های لاتین و برنامه‌ریزی + بخش ویژه ۱۰۰ درصدی‌ها

آمادگی کنکور ریاضیات گسسته دوازهم

جزوه: ۱

نظریه اعداد (۱)

صفحه	فهرست مطالب جزوه
۳	▪ انواعی از استدلال
۱۰	▪ بخش پذیری در اعداد صحیح
۱۷	▪ ب.م.م و ک.م.م اعداد
۲۶	▪ ویژه صد درصدی ها
۳۱	▪ تمرین تست
۳۴	▪ تست های ویژه داوطلبان سرآمد

وقتی با یک گزاره (یعنی: یک ادعا یا حکم) در ریاضیات مواجه می‌شویم، در کل فقط دو راه برای روشن کردن وضعیت آن وجود دارد. گاهی راهی نسبتاً ساده پیش روی ما است:

نکته ۱

مثال نقض:

برای نشان دادن این که یک حکم کلی نادرست است، باید مثالی آورده شود که کلیت آن حکم را رد کند. به چنین مثالی، «مثال نقض» گفته می‌شود.

توجه کنید:

اگر بتوانیم برای یک حکم مثال نقض بیابیم، در واقع اثبات کرده‌ایم که آن حکم قطعاً نادرست است.

توجه کنید:

مثالی که برای نقض یک حکم کلی آورده می‌شود، باید دارای دو شرط زیر باشد:

- فرض عبارت داده شده را برقرار سازد، ولی:
- حکم آن عبارت نادرست شود.

تست: اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| ① $\sqrt{6}$ و $\sqrt{216}$ | ② $\sqrt{6}$ و $\sqrt{12}$ |
| ③ $\sqrt{12}$ و $\sqrt{18}$ | ④ $\sqrt{18}$ و $\sqrt{216}$ |

گزینه ۱

باید دو عدد گنگ معرفی کنیم که ضرب آن‌ها گنگ نباشد. روش سریع این است که به تجزیه‌ی عددهای زیر رادیکال‌ها نگاه کنیم:

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} \quad \sqrt{216} = \sqrt{2^3 \times 3^3} \quad \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} \quad \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2}$$

واضح است که ضرب عددهای $\sqrt{6}$ و $\sqrt{216}$ باعث ایجاد توان زوج برای عامل‌ها و حذف رادیکال می‌شود:

$$\sqrt{6} \sqrt{216} = \sqrt{2 \times 3} \sqrt{2^3 \times 3^3} = \sqrt{2^4 \times 3^4} = 2^2 \times 3^2 = 36$$

ممکن است با آوردن مثال‌های گوناگون، نتوانیم هیچ مثال نقضی پیدا کنیم و تمام مثال‌های آورده شده، حکم را تایید کنند. در این صورت، توجه کنید:

اولاً: هر تعداد مثال در تایید یک حکم آورده شود، باعث اثبات آن نخواهد شد، چون:

همیشه امکان دارد مثال بعدی، یک مثال نقض باشد.

ثانیاً: وقتی چندین مثال یک حکم را تایید می‌کنند، احتمال درست بودن حکم در حالت کلی بیشتر می‌شود.

این روش نتیجه‌گیری را «**استدلال استقرایی**» گویند و در علوم تجربی، تقریباً تنها روش بوده و کاربرد فراوان دارد.

اما در ریاضیات:

بعد از بکار بردن استدلال استقرایی، حکم را به عنوان یک «**فرضیه**» می‌پذیریم.

برای این که فرضیه تایید قطعی شود، نیاز به اثبات دارد که توسط دو مورد زیر انجام می‌شود.

❖ حقایق پذیرفته شده

اصول و احکامی که قبلاً درستی آن‌ها اثبات شده است.

❖ روش‌های درست استنتاج

معمولاً حقایق پذیرفته شده‌ی قبلی با روش‌های درست استدلال، مفروضات مسأله را بکار می‌برند تا یک حکم جدید اثبات شود.

👉 حقایق پذیرفته شده:

برخی حقایق پذیرفته شده که در اثبات‌ها بیشتر بکار می‌روند را ببینید:

- هر عدد زوج به صورت $2k$ و هر عدد فرد به صورت $2k-1$ است.
- هر عدد گویا را می‌توان به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت که m و n دو عدد صحیح بوده و مخرج غیر صفر است. بعلاوه:

هر عددی که نتوان آن را به صورت کسر گویا نوشت، گنگ است.

به عنوان نمونه:

عددهای π ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ همگی گنگ هستند.

▪ عددهای طبیعی یا صحیح متوالی به صورت زیر هستند:

$$k, k+1, k+2, k+3, \dots$$

▪ عددهای متوالی زوج به صورت:

$$2k, 2k+2, 2k+4, \dots$$

و عددهای متوالی فرد به صورت زیر هستند:

$$2k+1, 2k+3, 2k+5, \dots$$

روش‌های اثبات:

می‌توان روش‌های اثبات احکام ریاضی را در دو نوع کلی طبقه بندی کرد:
اثبات مستقیم و اثبات غیرمستقیم

❖ اثبات مستقیم

در روش‌هایی که در این گروه جای می‌گیرند، فرض مسأله و حقایق قبلی به طور مناسب بکار رفته و اثبات صورت می‌پذیرد.

❖ اثبات غیر مستقیم

در این گروه از روش‌های اثبات، به نوعی حکم مسأله و حقایق قبلی را مورد استفاده قرار داده و درستی بودن حکم را نتیجه می‌گیریم.

نمونه‌هایی از اثبات مستقیم ببینید:

- حاصل جمع یا تفریق دو عدد زوج یا دو عدد فرد همواره زوج است. دلیل:

$$\begin{aligned} 2k + 2k' &= 2(k + k') = 2k'' \\ 2k - 1 + 2k' - 1 &= 2(k + k' - 1) = 2k'' \end{aligned}$$

اما اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، حاصل فرد است. دلیل:

$$2k + 2k' - 1 = 2(k + k') - 1 = 2k'' - 1$$

- حاصل ضرب دو عدد فرد، فرد بوده و در غیر این صورت حاصل ضرب زوج است:

$$(2k - 1)(2k' - 1) = 4kk' - 2k - 2k' + 1 = 2(2kk' - k - k') + 1 = 2k'' + 1$$

- حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو عدد گویا همیشه عددی گویا است. (در تقسیم باید مخرج غیرصفر باشد).

$$\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq} \quad \text{و} \quad \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \quad \text{و} \quad \frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$$

مثال: نشان دهید مربع هر عدد زوج، زوج است و مربع هر عدد فرد هم فرد است.



اگر n عددی زوج باشد:

$$n = 2k \rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \times \underbrace{2k^2}_{=k'} = 2k' \Rightarrow n^2 = 2k'$$

به صورت مشابه، برای n فرد:

$$n = 2k + 1 \rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{=k'} + 1 = 2k' + 1 \Rightarrow n^2 = 2k' + 1$$

بررسی تمام حالات:

تکنیک زیر گاهی اثبات احکام را ممکن می‌سازد:

تفکیک فرض به تمام حالت‌های ممکن، و بررسی درستی حکم در هر حالت.

این روش، در کار با عددهای طبیعی، نسبتاً کاربرد زیادی دارد.

مثال: نشان دهید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، زوج است.

پاسخ

دو عدد را به صورت n و $n+1$ در نظر بگیرید. برای n فقط دو حالت ممکن است رخ بدهد:

• ممکن است n زوج باشد. در این صورت:

$$n = 2k: \quad n \times (n+1) = 2k(2k+1) = 2 \times \underbrace{k(2k+1)}_{=k'} = 2k' \Rightarrow n \times (n+1) = 2k'$$

• ممکن است n فرد باشد. در این صورت:

$$n = 2k+1: \quad n \times (n+1) = (2k+1)(2k+2) = \underbrace{(2k+1)(k+1)}_{=k'} \times 2 = 2k' \Rightarrow n \times (n+1) = 2k'$$

در این حالت هم درستی حکم تأیید شد.

پس حکم در کل درست است.

نمونه‌های بیشتری در بخش‌ها یا جزوات بعد خواهیم دید.

در ادامه، دو روش در اثبات غیر مستقیم و نمونه‌هایی از هر کدام ببینید:

نکته ۲

برهان خلف:

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم؛ یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.
- با توجه به فرض مرحله‌ی قبل و بیان استدلالی مناسب، «حقایق شناخته شده» یا «فرض» آن قضیه یا مسأله را نقض می‌کنیم.
- نتیجه می‌گیریم حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال: نشان دهید اگر n^2 فرد باشد، آنگاه n هم فرد است.

پاسخ

برهان خلف: فرض کنید n فرد نباشد.

پس n زوج است و چنان که قبلاً دیدیم، باید n^2 هم زوج باشد که با فرض تناقض دارد.

پس حکم نمی‌تواند نادرست باشد و لذا صحیح خواهد بود.

تست: اگر α و β دو عدد گنگ، ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha - \beta$ بوده و $\alpha + 2\beta$ است.

- ① گنگ - گنگ ② گنگ - گویا ③ گویا - گنگ ④ گویا - گویا

گزینه ۱ ☒

اگر $\alpha - \beta$ گویا باشد، عبارت زیر نیز گویا خواهد شد:

$$\alpha - \beta + \alpha + \beta = 2\alpha \xrightarrow{+2} \alpha \text{ (غیرممکن)}$$

په روش مشابه:

$$\alpha + 2\beta - (\alpha + \beta) = \beta \text{ (غیرممکن)}$$

پس هر دو مورد باید گنگ باشند.

تست: حکم «اگر A و B ، دو ماتریس هم مرتبه باشند و $AB = \overline{O}$ ، آنگاه $A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$ » مفروض است. برای درستی این حکم از روش استفاده می‌کنیم.

- ① اثبات - استدلال استنتاجی ② رد - مثال نقض
③ اثبات - برهان خلف ④ رد - برهان خلف

گزینه ۲ ☒

با توجه به آن چه در مبحث ماتریس هندسه (۳) دیده ایم:

این حکم نادرست است و برای رد آن باید مثال نقض بکار رود.

نکته ۳

اثبات بازگشتی:

در اثبات به طریق بازگشتی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- حکم را موقتاً می‌پذیریم.
- با انجام استدلال‌های مناسب در چند مرحله به یک رابطه‌ی بدیهی یا فرض داده شده می‌رسیم.
- اکنون اگر تمام مراحل را بتوان از آخر به اول نتیجه گرفت، یعنی اعمال انجام شده برگشت‌پذیر باشند، درستی حکم تأیید می‌شود.

مثال: نامساوی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ را برای $a > 0$ نشان دهید.

پاسخ ☒

کافی است دو طرف حکم $a + \frac{1}{a} \geq 2$ را در $a > 0$ ضرب کنیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times a} a^2 + 1 \geq 2a \rightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

مشاهده می‌کنید که عبارت $(a-1) \geq 0$ همواره درست است و علاوه تمام مراحل بالا برگشت پذیر هستند.

تست: در اثبات حکم $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ برای اعداد حقیقی x و y ، همواره به کدام عبارت بدیهی می‌رسیم؟

$$(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \quad \textcircled{2}$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \quad \textcircled{1}$$

$$(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$(x-y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 0 \quad \textcircled{3}$$

گزینه ۱ ☒

طبق روش بازگشتی، دو طرف حکم را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

تست: در اثبات نامساوی $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطه‌ی بدیهی به دست آمده کدام است؟ (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند).

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0 \quad \textcircled{4}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \quad \textcircled{3}$$

$$x^2 + y^2 > 0 \quad \textcircled{2}$$

$$(x+y)^2 > 0 \quad \textcircled{1}$$

گزینه ۳ ☒

روش بازگشتی را تا رسیدن به یک رابطه‌ی بدیهی بکار می‌بریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 4\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$x + 4\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq 4\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

تست: کدام یک از عبارت‌های زیر، یک قضیه‌ی دو شرطی است؟ ($a, k \in \mathbb{R}$)

$$\textcircled{1} \text{ اگر } a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ باشد، آنگاه } a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \text{ است.}$$

$$\textcircled{2} \text{ اگر } a > 0 \text{ باشد، آنگاه } a \neq -1 \text{ است.}$$

$$\textcircled{3} \text{ اگر } \alpha \text{ و } \beta \text{ دو عدد گنگ باشند، آنگاه } \alpha - \beta \text{ گویاست.}$$

$$\textcircled{4} \text{ اگر } k^3 > k^2 \text{ باشد، آنگاه } k > 1 \text{ است.}$$

گزینه ۴ ☒

پدرسی تمام موارد را ببینید:

- گزینه‌ی اول: یک قضیه‌ی شرطی است، ولی عکس آن با مثال نقض رد می‌شود:

$$\text{اگر } a = -2 \text{ باشد، نامساوی } 2 \geq (-2)^2 + \frac{1}{(-2)^2} \text{ درست است، ولی } 2 < -2 + \frac{1}{-2} \text{ خواهد شد.}$$

- گزینه‌ی دوم: یک قضیه‌ی شرطی است، ولی عکس آن هم با مثال نقض رد می‌شود:

$$\text{اگر } a = -2 \text{ باشد، نامساوی } -1 \neq -2 \text{ درست، ولی } -2 > 0 \text{ نادرست است.}$$

- گزینه‌ی سوم: گزاره‌ی شرطی داده شده خودش نادرست است؛ مثال نقض: $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = 2\sqrt{2}$.

- گزینه‌ی چهارم: هم خودش درست است و هم عکس آن:

$$k^3 > k^2 \xrightarrow{k \neq 0, \div k^2} \frac{k^3}{k^2} > \frac{k^2}{k^2} \Rightarrow k > 1$$

$$k > 1 \xrightarrow{k \neq 0, \times k^2} k^2 \times k > k^2 \times 1 \Rightarrow k^3 > k^2$$



نکته ۴

بخش پذیری:

فرض کنید a و $b \neq 0$ عددهایی صحیح باشند.

عدد a را بر b «بخش پذیر» گوئیم، هرگاه عدد صحیح k یافت شود که $a = bk$. در این صورت می نویسیم: $b | a$. بنابراین:

$$b | a \Leftrightarrow a = bk, b \in \mathbb{Z}$$

برای نمونه:

داریم: $4 | -12$ ، زیرا عدد -12 را می توان به صورت $4(-3)$ نوشت.

اگر چنین عدد k وجود نداشته باشد، می نویسیم: $b \nmid a$.

به عنوان نمونه:

$4 \nmid 10$ ، زیرا ضرب عدد 4 در هیچ عدد صحیحی برابر 10 نخواهد شد: $10 \neq 4k$.

بعلاوه:

عبارت $b | a$ به صورت « b عاد می کند a » یا « b عدد a را می شمارد» خوانده می شود.

توجه کنید:

چند خاصیت مقدماتی در شمارش:

- تمام اعداد بر 1 و -1 بخش پذیر هستند؛ یعنی همواره: $\pm 1 | a$.
- تمام اعداد صحیح، عدد صفر را عاد می کنند، زیرا: $0 = a \times 0$. به عبارت دیگر:

$$a = 1 \times a \rightarrow 1 | a \quad \text{و} \quad a = -1 \times (-a) \rightarrow -1 | a$$
- صفر تنها عددی است که بر تمام اعداد بخش پذیر است، یعنی همواره: $a | 0$.
- هیچ عددی بر صفر بخش پذیر نیست. ولی چون تساوی $0 = 0 \times k$ برای هر عدد صحیح k برقرار است، خواهیم داشت: $0 | 0$. بنابراین:

$$0 | a \Rightarrow a = 0$$

یعنی:

عدد صفر فقط خودش را عاد می کند.

- هر عددی بر خودش بخش پذیر است. زیرا:

$$a = a \times 1 \Rightarrow a | a$$

مثال: نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a | a^n$$

اثبات:

الف) اگر $n=1$ باشد، رابطه‌ی بدیهی $a | a$ را داریم که درست است.

ب) اگر $n > 1$ باشد، در این صورت:

$$a^n = a \times \underbrace{a^{n-1}}_{=k} \rightarrow a^n = ak \Rightarrow a | a^n$$

در مبحث نظریه اعداد، مفهوم آشنای زیر نقش بسیار مهمی دارد، که آن را دقیق بیان می‌کنیم:

نکته ۵

عدد اول :

عدد طبیعی $p > 1$ را «اول» گوئیم، هرگاه غیر از ۱ و خودش هیچ مقسوم‌علیه مثبتی نداشته باشد.

بنابراین:

اگر p عددی اول باشد:

$$a | p \Rightarrow a = \pm 1, a = \pm p$$

سایر اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «مركب» گوئیم.

بنابراین:

عدد ۱ نه اول است و نه مركب.

توجه کنید:

عدد ۲ تنها عدد اول زوج است؛ زیرا سایر عددهای زوج بر ۲ بخش‌پذیر بوده و اول نیستند.

در ادامه ویژگی‌های اصلی شمارش و برخی کاربردهای هر کدام را ببینید:

نکته ۶

ویژگی ۱ :

نتیجه‌گیری زیر برای هر عدد صحیح m درست است:

$$a | b \Rightarrow a | bm$$

دلیل:

طبق فرض، برای یک $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ak$ و در نتیجه:

$$bm = a \underbrace{km}_{k'} \Rightarrow bm = ak' \Rightarrow a | bm$$

مثال: موارد زیر را انجام دهید:

الف) برای نتیجه گیری زیر دلیل بیاورید:

$$a|b, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow ak|bk$$

ب) نشان دهید نتیجه گیری عکس قسمت قبل صحیح نیست.

$$ak|bk, k \in \mathbb{Z} \not\Rightarrow a|b$$

پاسخ ✓**الف)** چون برای $q \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = aq$ ، بنابراین:

$$b = aq \xrightarrow{\times k} bk = akq \Rightarrow ak|bk$$

ب) برای حکم (این قسمت مثال نقض داریم):

$$5|7 \rightarrow 5 \times 1 = 5 \neq 7 \Rightarrow 5 \nmid 7$$

نکته ۷**ویژگی ۲:**

شمارش خاصیت تعدی دارد، یعنی:

اگر a بر b و b بر c بخش پذیر باشد، آنگاه: a بر c بخش پذیر است.

با نماد ریاضی:

$$c|b \wedge b|a \Rightarrow c|a$$

دلیل:طبق فرض، برای عددهای $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ck_1$ و $a = bk_2$. در نتیجه:

$$a = bk_2 = \underbrace{ck_1}_{=k} k_2 \rightarrow a = ck \Rightarrow c|a$$

مثال: نشان می دهیم از $a|b$ نتیجه می شود برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a|b^n$$

زیرا:

قبلاً دیدیم که همواره $b|b^n$ است و در نتیجه طبق ویژگی قبل:

$$a|b \wedge b|b^n \Rightarrow a|b^n$$

تست: برای دو عدد صحیح a و b ($a \neq 0$)، اگر $a^3 | b^2$ ، آنگاه کدام رابطه‌ی زیر لزوماً درست نیست؟

④ $a | b^2$

③ $a^4 | b^5$

② $a^2 | b$

① $a | b$

گزینه ۲ ☒

برای مورد دوم مثال نقض وجود دارد:

اگر $a = 4$ و $b = 8$ باشد، می‌بینید که $4^3 | 8^2$ برقرار است، ولی $4^2 | 8$ صحیح نیست.



نکته ۸

ویژگی ۳:

این ویژگی به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر دو عدد بر عددی بخش‌پذیر باشند، آنگاه جمع و تفریقشان هم بر آن عدد بخش‌پذیر است.

به نماد ریاضی:

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$$

دلیل:

طبق فرض، برای عددهای $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ak_1$ و $c = ak_2$. در نتیجه:

$$b \pm c = ak_1 \pm ak_2 = a(\underbrace{k_1 \pm k_2}_{=k}) \rightarrow b \pm c = ak \Rightarrow a | b \pm c$$

تست: اگر $a - b | a$ ، آنگاه ...

④ $a - b | b$

③ $a | b$

② $b | a - b$

① $a | a - b$

گزینه ۴ ☒

این تست را می‌توان به روش آزمون عددها پاسخ داد که در مواقع آزمون که محدودیت زمانی وجود دارد، بسیار مؤثر است. روش دیگر: چون هر عددی خودش را عاد می‌کند:

$$\left. \begin{array}{l} a - b | a \\ a - b | a - b \end{array} \right\} \rightarrow a - b | a - (a - b) \Rightarrow a - b | b$$



نتیجه گیری:

برای عددهای صحیح m و n همواره داریم:

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | bm \pm cn$$

دلیل این مطلب، با توجه به ویژگی‌های اول و سوم بدیهی است.

تست: اگر $3a + 4b \mid 5a + 9b$ ، آنگاه کدام یک از اعداد زیر مضرب $3a + 4b$ است؟

۱۵b ④

۱۸b ③

۲۱b ②

۲۴b ①

گزینه ۲ ✓

از خواص گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b \mid 5a + 9b \\ 3a + 4b \mid 3a + 4b \end{array} \right\} \rightarrow 3a + 4b \mid 3(5a + 9b) - 5(3a + 4b) \rightarrow 3a + 4b \mid 7b$$

طبق ویژگی (۱) خواهیم داشت:

$$3a + 4b \mid 7b \times 3 \Rightarrow 3a + 4b \mid 21b$$

تست: به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ ، اگر $3 \mid 13n + 3$ و $4 \mid 7n + 4$ و $\alpha \neq 1$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n ، کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۸)

۱۰ ④

۹ ③

۸ ②

۷ ①

گزینه ۲ ✓

ابتدا مقدار α را مشخص می‌کنیم:

$$\alpha \mid 13(7n + 4) - 7(13n + 3) \rightarrow \alpha \mid 31 \xrightarrow{\alpha \neq 1} \alpha = 31$$

حال می‌توان مقادیر n را معلوم کرد:

$$31 \mid 2(7n + 4) - (13n + 3) \rightarrow 31 \mid n + 5$$

کمترین مقدار n وقتی حاصل می‌شود که $n + 5 = 31$ باشد. از آنجا $n = 26$ و جمع ارقام آن $2 + 6 = 8$ خواهد شد.

مثال: اگر $2n - 1 \mid 2n^2 + 1$ ، جواب‌های طبیعی n را مشخص کنید.

پاسخ ✓

چون هر عددی خودش را عاد می‌کند:

$$2n - 1 \mid 2n - 1 \rightarrow 2n - 1 \mid (2n - 1)n \rightarrow 2n - 1 \mid 2n^2 - n$$

از این رابطه و فرض داریم:

$$2n - 1 \mid (2n^2 + 1) - (2n^2 - n) \rightarrow 2n - 1 \mid n + 1$$

دوباره این رابطه و رابطه‌ی پدیپی $2n - 1 \mid 2n - 1$ را با هم ترکیب می‌کنیم:

$$2n - 1 \mid 2(n + 1) - (2n - 1) \rightarrow 2n - 1 \mid 3 \rightarrow 2n - 1 = \pm 1, \pm 3$$

$$\begin{cases} 2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1 \\ 2n - 1 = -1 \Rightarrow n = 0 \\ 2n - 1 = 3 \Rightarrow n = 2 \\ 2n - 1 = -3 \Rightarrow n = -1 \end{cases}$$

فقط دو جواب طبیعی $n = 1$ و $n = 2$ بدست آمد.

توجه کنید:

سؤالات تیپ مثال قبل را در حالتی ساده‌تر، می‌توان با قاعده‌ی زیر، با سرعت بیشتری جواب داد:
اگر n یک جواب رابطه‌ی $n-a \mid P(n)$ باشد، باید در رابطه‌ی $n-a \mid P(a)$ نیز صادق باشد:

$$n-a \mid P(n) \Rightarrow n-a \mid P(a)$$

تست: بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که در رابطه‌ی $n+4 \mid n^3+n+1$ صدق کند، کدام است؟

۵۹ ④

۶۳ ③

۶۷ ②

۱۴۱ ①

گزینه ۳ ✓

با استفاده از نکته‌ی قبل، $n+4$ باید عبارت n^3+n+1 را به ازای ریشه‌ی خود (یعنی: $n+4=0 \rightarrow n=-4$) عاد کند:

$$n+4 \mid (-4)^3 + (-4) + 1 \rightarrow n+4 \mid -67 \rightarrow n+4 \mid 67$$

بزرگ‌ترین مقدار $n+4=67$ بوده و لذا $n=63$ جواب است.

نکته ۹

ویژگی ۴:

اگر داشته باشیم: $a \mid b$ و $b \neq 0$ باشد، آنگاه $|a| \leq |b|$. به صورت نمادین:

$$a \mid b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

به زبان ساده:

یک عدد مثبت نمی‌تواند بر عددهای بزرگ‌تر از خود بخش‌پذیر باشد.

دلیل:

طبق فرض، عدد $k \in \mathbb{Z}$ هست که: $b = ak$. در نتیجه:

$$|b| = |a| |k| \xrightarrow{|k| \geq 1} |b| \geq |a|$$

مثال: اگر a و b عددهایی صحیح و غیر صفر باشند، نشان دهید:

$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = \pm b$$

پاسخ ✓

طبق ویژگی قبل باید داشته باشیم:

$$|a| \leq |b| \quad \text{و} \quad |b| \leq |a|$$

بنابراین:

$$|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

توجه کنید:

رابطه‌ی عاد کردن دارای دو خاصیت ضربی و ساده کردن زیر است:

- اگر $a|b$ و $c|d$ ، آنگاه $ac|bd$.
- اگر $ac|bc$ و $c \neq 0$ باشد، آنگاه داریم: $a|b$.

تست: اگر a ، b و c اعداد طبیعی و $a^2|bc$ و $c|a$ ، آنگاه کدام مورد صحیح است؟

- ① $a|b$ ② $b|a$ ③ $b|ac$ ④ $b|c$

گزینه ۱

روش عددگذاری مناسب چای a ، b و c همواره در دسترس است. روش مستقیم این است که:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 | bc \\ c | a \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} a^2 c | abc \Rightarrow a | b$$

نکته ۱۰

بخش‌پذیری ضرب‌های متوالی:

به چند مورد ساده ولی کاربردی در مورد ضرب عددهای متوالی توجه کنید:

- حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است، چون یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج است:

$$n(n+1) = 2k$$

- حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است و در کل:
- حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی، همواره مضرب $n!$ است، یعنی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

مثال: نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است؟

پاسخ

فرض کنید n عددی فرد باشد. پس: $n = 2q+1$ و می‌نویسیم:

$$n^2 = (2q+1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q+1) + 1 = 8k + 1$$

$\underbrace{4q(q+1)}_{=2k}$

توجه کنید:

حکم اثبات شده در این مثال را در ذهن داشته باشید.

تعاریف دقیق ب.م.م (یعنی: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک) و ک.م.م (یعنی: کوچک‌ترین مضرب مشترک) عددی صحیح و کاربردهایی از آن‌ها را در این بخش خواهیم دید.

نکته ۱۱

ب.م.م اعداد:

فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند که لاقل یکی از آن‌ها غیر صفر است. عدد طبیعی d را «ب.م.م» این دو عدد گوئیم، هرگاه:

- اولاً: $d|a$ و $d|b$ و
- ثانیاً: سایر مقسوم علیه‌های مشترک a و b از d کوچک‌تر باشند. ب.م.م این دو عدد را با (a, b) نشان می‌دهیم و لذا می‌نویسیم:

$$(a, b) = d$$

توجه کنید:

اگر عدد c چنان باشد که $c|a$ و $c|b$ ، آنگاه: $c|(a, b)$.

توجه کنید:

چند مورد مقدماتی و خاص:

- اگر $a|b$ ، آنگاه $(a, b) = |a|$ است. بویژه:

$$(a, a) = |a| \quad \text{و} \quad (a, 0) = |a|$$

توجه کنید که عبارت $(0, 0)$ بی‌معنی است.

- فرض کنید p عددی اول و a عددی صحیح باشد:

اگر $p|a$ ، آنگاه: $(a, p) = p$ و در غیر این صورت: $(a, p) = 1$.

تست: حاصل $(a^2 - 4a + 1, a - 3)$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

④ ۱ یا ۳ یا ۶

③ ۱ یا ۲ یا ۴

② ۱ یا ۵

① ۱ یا ۲

گزینه ۱ ☒

اگر قرار دهیم: $(a^2 - 4a + 1, a - 3) = d$ ، باید $d|a^2 - 4a + 1$ و $d|a - 3$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} d|a(a-3) &\rightarrow d|a^2 - 3a \xrightarrow{(-)} d|a^2 - 3a - (a^2 - 4a + 1) \\ &\rightarrow d|a - 1 \xrightarrow{(-)} d|a - 1 - (a - 3) \Rightarrow d|2 \end{aligned}$$

پس مقدار d فقط می‌تواند ۱ یا ۲ باشد.

تست: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n^2 + n$ و $3n - 1$ ، برای مقادیر مختلف طبیعی n ، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۴ ④

۳ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۳ ☒

مانند تست قبل: $(n^2 + n, 3n - 1) = d$ و سپس:

$$d \mid 3(n^2 + n), d \mid n(3n - 1) \xrightarrow{(-)} d \mid 4n$$

برای حذف، روند بالا را تکرار می‌کنیم:

$$d \mid 3(4n), d \mid 4(3n - 1) \xrightarrow{(-)} d \mid 4 \Rightarrow d = 1, 2, 4$$

حالت خاص زیر در مورد ب.م.م اعداد اهمیت بسیاری دارد:

نکته ۱۲

اعداد متباین:

دو عدد a و b را نسبت به هم «اول» یا «متباین» گوئیم، هرگاه:

$$(a, b) = 1$$

به دو مورد در ارتباط با این مفهوم توجه کنید:

- واضح است که $(4, 9) = 1$ و بنابراین متباین بودن اعداد ربطی به اول بودن تک‌تک آن‌ها ندارد.
- دو عدد a و b وقتی نسبت به هم اول هستند که در تجزیه‌ی این دو عدد به عددهای اول، عامل اول مشترکی وجود نداشته باشد. برای نمونه:
چون $48 = 2^4 \times 3$ و $35 = 5 \times 7$ ، بنابراین $(48, 35) = 1$ است.

تست: کدام مورد همواره صحیح است؟

- ① دو عدد فرد همواره نسبت به هم اول‌اند.
- ② اگر a و b اعدادی صحیح باشند، آنگاه $(a, (a, b)) = |a|$.
- ③ تمام اعداد فرد نسبت به عدد ۶۴ اول‌اند.
- ④ اگر a یک عدد صحیح باشد، آنگاه $(a, 0) = (a, 1)$.

گزینه ۳ ☒

چون اعداد فرد در تجزیه‌ی خود عامل ۲ را ندارند و از طرفی $64 = 2^6$ ، پس پیرین یک عدد فرد و عدد ۶۴ عامل اول مشترک وجود ندارد.

تست: کدام یک از اعداد زیر نسبت به هر سه عدد ۶۴، ۸۱ و ۱۲۵ اول است؟

- ۴۹ ① ۳۵ ② ۲۱ ③ ۱۴ ④

گزینه ۱ ☒

مانند تست قبل، عدد مورد نظر باید در تجزیه خود، عامل‌های ۲، ۳ و ۵ را نداشته باشد که فقط ۴۹ چنین است.

تست: اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $5a - 12b = 17$ و $(a, b) \neq 1$ ، آنگاه (a, b) کدام است؟

- ۵ ① ۱۲ ② ۷ ③ ۱۷ ④

گزینه ۴ ☒

قرار می‌دهیم: $(a, b) = d$. چون $5a - 12b = 17$ ، طبق نکته‌ی قبل باید داشته باشیم: $d | 17$. چون ۱۷ عددی اول است، مقدار d باید برابر ۱ یا ۱۷ باشد که طبق فرض نمی‌تواند برابر ۱ قرار گیرد.

تست: اگر a و b اعدادی صحیح باشند، آنگاه ب.م.م. عددهای a و $ab+1$ کدام است؟

- ۱ ① a ② b ③ $a+1$ ④

گزینه ۱ ☒

قرار می‌دهیم: $(ab+1, a) = d$. طبق تعریف باید $d | a$ و لذا d هر مضرب a از جمله ab را عادی می‌کند. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} d | ab \\ d | ab+1 \end{array} \right\} \rightarrow d | ab+1-ab \rightarrow d | 1 \Rightarrow d=1$$

تست: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n^2+1$ و $2n-4$ برابر است با:

- ۵ یا ۴ ① ۱ یا ۹ ② ۱ یا ۷ ③ ۲ یا ۴ ④

گزینه ۲ ☒

طبق تکنیک عددگذاری:

$$n=1: (2n-4, 2n^2+1) = (-2, 3) = 1 \rightarrow \text{رد گزینه‌های ۱ و ۴}$$

$$n=2: (2n-4, 2n^2+1) = (0, 9) = 9 \rightarrow \text{رد گزینه ۳}$$

اکنون مضرب‌های مشترک دو عدد صحیح را بررسی می‌کنیم:

نکته ۱۳

ک.م.م اعداد:

فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند که هر دو غیر صفر هستند. عدد طبیعی c را «کوچک‌ترین مضرب مشترک» و به صورت مخفف ک.م.م این دو عدد گوئیم، هرگاه:

▪ اولاً: $a|c$ و $b|c$ و

▪ ثانیاً: سایر مضرب‌های مثبت و مشترک a و b از c بزرگ‌تر باشند. ک.م.م دو عدد را با $[a, b]$ نشان می‌دهیم و لذا می‌نویسیم:

$$[a, b] = c$$

توجه کنید:

اگر عدد m چنان باشد که $a|m$ و $b|m$ ، آنگاه: $[a, b]|m$.

چند مورد ساده:

▪ هرگاه $a|b$ ، آنگاه $[a, b] = |b|$ است؛ بویژه:

$$[a, a] = |a| \quad \text{و} \quad [\mp 1, a] = |a|$$

▪ اگر تجزیه‌ی دو عدد به صورت $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ و $a = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ باشد، آنگاه:

$$[a, b] = p_1^{\theta_1} \times p_2^{\theta_2} \times \dots \times p_k^{\theta_k}, \quad \theta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$$

▪ برای اعداد صحیح غیر صفر a و b همواره داریم:

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$$

تست: فرض کنید $(a, b) = 2^4 \times 5 \times 7^2$ و $ab = 2^9 \times 5^3 \times 7^4 \times 17$. در تجزیه به عوامل اول، مجموع توان‌های عوامل $[a, b]$ کدام است؟

۱۳ ④

۱۲ ③

۱۱ ②

۱۰ ①

تایید ✓ گزینه ۱

طبق نکته‌ی گفته شده در بالا:

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)} = \frac{2^9 \times 5^3 \times 7^4 \times 17}{2^4 \times 5 \times 7^2} = 2^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 17 \Rightarrow 5 + 2 + 2 + 1 = 10$$

تست: اگر a و b دو عدد صحیح غیر صفر باشند، کدام نادرست است؟

$$[a, (a, b)] = |a| \quad ②$$

$$(a, [a, b]) = |a| \quad ①$$

$$[a, (a, \circ)] = |a| \quad ④$$

$$(a, [a, \circ]) = |a| \quad ③$$

گزینه ۳

توجه کنید که ک.م.م فقط برای عددهای غیر صفر معنی دارد؛ در نتیجه $[a, 0]$ و به دنبال آن $(a, [a, 0])$ معنی نداشته و تساوی داده شده برقرار نخواهد بود.

تست: رقم وسط بزرگ‌ترین عدد طبیعی سه رقمی n که در رابطه‌ی $14 | n-1$ و $52 | n-1$ صدق می‌کند، کدام است؟

۴

۳

۲

۱

گزینه ۳

طبق نکته‌ی قبل باید ک.م.م عددهای ۱۴ و ۵۲ عدد $n-1$ را عا د کند:

$$14 = 2 \times 7, 52 = 2^3 \times 13 \rightarrow [14, 52] = 2^3 \times 7 \times 13 = 364$$

پس باید $364 | n-1$ و در نتیجه:

$$n-1 = 364k \Rightarrow n = 364k + 1 \Rightarrow 364k + 1 < 1000 \Rightarrow k < \frac{999}{364} \equiv 2/74$$

بنابراین بیشترین مقدار k برابر ۲ بوده و از آن‌جا بزرگ‌ترین مقدار n برابر $364 \times 2 + 1 = 729$ شده که رقم وسط آن ۲ خواهد بود.

نکات دیگر:

به چند مورد توجه کنید:

▪ ب.م.م و ک.م.م برای سه عدد صحیح a و b و c به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a, b, c] = [[a, b], c] \quad \text{و} \quad (a, b, c) = ((a, b), c)$$

▪ برای دو عدد صحیح و مثبت a و b :

$$(a^n, b^n) = d^n \quad \text{نتیجه می‌دهد که: } (a, b) = d \quad \circ$$

$$[a^n, b^n] = c^n \quad \text{نتیجه می‌دهد که: } [a, b] = c \quad \circ$$

▪ برای هر عد صحیح k داریم:

$$[ka, kb] = |k| [a, b] \quad \text{و} \quad (ka, kb) = |k| (a, b)$$

در پایان، حالتی را بررسی می‌کنیم که عددها بر هم بخش‌پذیر نیستند:

نکته ۱۴

قضیه تقسیم:

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، اعداد صحیح و یکنای q و r وجود دارند که:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

عددهای q و r به ترتیب «خارج قسمت» و «باقی‌مانده» تقسیم a بر b نام دارند.

توجه کنید:

در تقسیم a بر b همواره می‌توان:

- خارج قسمت را توسط جزء صحیح $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ و سپس:
- باقی‌مانده را از رابطه‌ی $r = a - bq$ بدست آورد.

مثال: خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عددهای ۳۱ و -۳۱ بر ۷ را تعیین کنید.

پاسخ

تقسیم را به صورت عادی انجام می‌دهیم؛ فقط توجه داشته باشید خارج قسمت را باید عددی انتخاب کنید که باقی‌مانده منفی نشود:

$$\begin{array}{r} 31 \quad | \quad 7 \\ - 28 \quad | \quad 4 \\ \hline 3 \end{array} \Rightarrow r=3, q=4 \qquad \begin{array}{r} -31 \quad | \quad 7 \\ - 35 \quad | \quad -5 \\ \hline 4 \end{array} \Rightarrow r=4, q=-5$$

روش دوم:

خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم -۳۱ بر ۷ را با استفاده از نکته‌ی قبل مشخص می‌کنیم:

$$q = \left\lfloor \frac{-31}{7} \right\rfloor = \left\lfloor -4.428 \right\rfloor = -5 \xrightarrow{r=a-bq} r = -31 - 7(-5) \Rightarrow r = 4$$

تست: خارج قسمت تقسیم عدد ۷۸۷ بر چند عدد طبیعی برابر ۱۰ است؟

۶ **۴**

۷ **۳**

۸ **۲**

۹ **۱**

گزینه ۳

طبق مطلب بالا باید داشته باشیم:

$$\left\lfloor \frac{787}{b} \right\rfloor = 10 \rightarrow 10 \leq \frac{787}{b} < 11 \rightarrow \begin{cases} 10 \leq \frac{787}{b} \xrightarrow{\times b} 787 \geq 10b \xrightarrow{+10} b \leq 78.7 \\ \frac{787}{b} < 11 \xrightarrow{\times b} 787 < 11b \xrightarrow{+11} b > \frac{787}{11} \approx 71.54 \end{cases}$$

هفت عدد ۷۲، ۷۳، ۷۴ و ... و ۷۸ در اشتراک دو شرط بالا قرار دارند.

تست: در تقسیم a بر b خارج قسمت و باقی‌مانده با هم برابرند. اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. مقادیر خارج قسمت کدام است؟

۱۰ و ۸ **۴**

۱۰ و ۵ **۳**

۹ و ۴ **۲**

۸ و ۵ **۱**

گزینه ۳

با توجه به اطلاعات داده شده، دو پار رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = bq + q \\ a = (b-3)(q+5) + 0 \end{cases} \rightarrow bq + q = bq + 5b - 3q - 15 \Rightarrow 4q = 5(b-3)$$

پس باید داشته باشیم $4q \mid 5(b-3)$ که تنها اعداد گزینه‌ی سه در این شرط صادق هستند.

تست: در تقسیم چند عدد طبیعی بر ۵۰، باقی‌مانده برابر ثلث مربع خارج قسمت است؟

۱۲ ④

۴ ③

۸ ②

۱۶ ①

گزینه ۳

عددی با خاصیت مورد نظر را با n و خارج قسمت تقسیم را با q نشان داده و طبق الگوریتم تقسیم می‌نویسیم:

$$n = 50q + \frac{q^2}{3}$$

اکنون با رعایت دو شرط اچپاری، تعداد جواب‌های q و در نتیجه تعداد n ها مشخص می‌شوند:

• چون $\frac{q^2}{3}$ باقی‌مانده‌ی تقسیم است، باید از مقسوم علیه کمتر باشد:

$$0 \leq \frac{q^2}{3} < 50 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq q^2 < 150 \xrightarrow{\sqrt{150} \approx 12.2/2} q = 0, 1, 2, \dots, 12$$

• توجه کنید که $q = 0$ قبول نیست، زیرا برای آن $n = 0$ شده که قابل قبول (طبیعی) نیست. از طرف دیگر، چون $\frac{q^2}{3}$ باقی‌مانده

است، باید صحیح بوده و لذا باید q^2 بر ۳ بخش پذیر باشد. بنابراین فقط چهار مقدار ۳، ۶، ۹ و ۱۲ از بین جواب‌های مرحله‌ی اول قابل قبول هستند!

به یک کاربرد مهم قضیه‌ی تقسیم توجه کنید:

دسته‌بندی اعداد صحیح:

فرض کنید $m > 1$ عدد طبیعی ثابتی باشد. عدد صحیح دلخواه a را در نظر گرفته و آن را بر m تقسیم می‌کنیم:

$$a = mk + r; \quad r = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

می‌بینید که می‌توان عددهای صحیح را بر حسب باقی‌مانده تقسیم بر m در یک مجموعه قرار داد.

اگر باقی‌مانده صفر باشد، عددها به صورت زیر هستند:

$$a = mk, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مجموعه‌ی تمام این نوع اعداد را با $[0]_m$ نشان می‌دهیم:

$$[0]_m = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر ۱ شود، عددها به این صورت هستند:

$$[1]_m = \{mk + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

سایر عددهای صحیح نیز به یکی از صورت‌های زیر خواهند بود:

$$[2]_m = \{mk + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[3]_m = \{mk + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

⋮

$$[m-1]_m = \{mk + m-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

می‌بینید که:

با انتخاب عدد عدد طبیعی m ، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ دقیقاً به تعداد m زیر مجموعه افراز شد:

$$[0]_m, [1]_m, [2]_m, \dots, [m-1]_m$$

یعنی:

- این مجموعه‌ها هیچ یک تهی نیستند.
- دو به دو اشتراک ندارند.
- هر عدد صحیح در یکی از آن‌ها جای دارد.

به عنوان نمونه:

برای $m = ۴$ دقیقاً چهار قسمت افراز چنین هستند:

$$[۰]_۴ = \{۴k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, \dots\}$$

$$[۱]_۴ = \{۴k + ۱ \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots\}$$

$$[۲]_۴ = \{۴k + ۲ \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \dots\}$$

$$[۳]_۴ = \{۴k + ۳ \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots\}$$

در نتیجه:هر عدد صحیح a بر حسب عدد طبیعی m به یکی از صورت‌های زیر قابل نوشتن است:

$$mk, mk + ۱, mk + ۲, \dots, mk + m - ۱$$

برای نمونه:

بر حسب $m = ۵$ ، هر عدد صحیح به یکی از حالت‌های زیر قابل نوشتن است:

$$۵k, ۵k + ۱, ۵k + ۲, ۵k + ۳, ۵k + ۴$$

توجه کنید:از بین پنج حالت بالا، فقط اولین حالت، یعنی عددهای به شکل $۵k$ ، بر ۵ بخش پذیر هستند.**مثال:** نشان دهید اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آنگاه n هم مضرب ۳ است.**برهان خلف:** فرض کنید n مضرب ۳ نباشد. (فرض خلف)چون n نمی‌تواند به صورت $۳k$ باشد، باید به یکی از دو صورت $۳k + ۱$ یا $۳k + ۲$ باشد.

- اگر $n = ۳k + ۱$ باشد، آنگاه:

$$n^۲ = (۳k + ۱)^۲ = ۹k^۲ + ۶k + ۱ = ۳(\underbrace{۳k^۲ + ۲k}_{=k'}) + ۱ = ۳k' + ۱$$

یعنی $n^۲$ مضرب ۳ نیست که با فرض تناقض دارد.

- حالت دیگر این است که $n = ۳k + ۲$ باشد که باز هم به تناقض خواهد رسید:

$$n^۲ = (۳k + ۲)^۲ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۴ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۳ + ۱ = ۳(\underbrace{۳k^۲ + ۴k + ۱}_{=k'}) + ۱ = ۳k' + ۱$$

بنابراین فرض خلف باطل شده و حکم صحیح خواهد بود.



تست: اگر عدد صحیح a بر ۲ و ۳ بخش پذیر نباشد، آنگاه a به کدام صورت است؟

④ موارد ۱ و ۳

③ $6q + 5$

② $6q + 4$

① $6q + 1$

گزینه ۴ ☒

عدد a در دسته پندی بر حسب ۶ باید به یکی از شکل‌های زیر باشد:

$6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$

چون a بر ۲ بخش پذیر نیست، نمی‌تواند به صورت $6k, 6k+2$ و $6k+4$ باشد و چون بر ۳ بخش پذیر نیست، به صورت $6k+3$ هم نیست. پس a یا به صورت $6k+1$ است و یا $6k+5$.

تست: اگر a یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه a^4 به کدام صورت است؟

④ $8k+3$

③ $8k-1$

② $16k+1$

① $16k+2$

گزینه ۲ ☒

قبلاً دیدیم که مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است، پس می‌توان نوشت:

$$a^4 = (a^2)^2 = (8k+1)^2 = 64k^2 + 16k + 1 = 16(\underbrace{4k^2 + k}_{k'}) + 1$$

در بخش پایانی، نمونه‌هایی پیشرفته‌تر از مباحث این جزوه ویژه «داوطلبان صد درصدی» آزمون‌ها می‌آوریم:



اگر قادر به درک راه حل‌ها نیستید، بدون نگرانی از این بخش عبور کنید.

نکته ۱۵

تعداد مضرب‌ها:

مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ و عدد طبیعی k را در نظر بگیرید. در این صورت:

تعداد عضوهای A که بر k بخش‌پذیر هستند برابر $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ است. (جزء صحیح)

این مطلب دو نتیجه‌ی مهم دارد:

❖ ممکن است شروع مجموعه از عدد ۱ نباشد.

تعداد اعدادی از مجموعه‌ی $\{m, m+1, m+2, \dots, n\}$ که بر k بخش‌پذیرند، برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-1}{k} \right\rfloor$$

❖ عددهایی که بر دو عدد طبیعی k و k' بخش‌پذیر هستند دقیقاً عددهایی هستند که بر ک.م.م. این دو بخش‌پذیر باشند. بنابراین:

تعداد اعدادی از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ که بر هر دوی k و k' بخش‌پذیرند، برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

که m برابر ک.م.م k و k' است.

تست: تعداد اعداد سه‌رقمی مضرب ۱۷ کدام است؟

۵۴ ④

۵۱ ③

۵۳ ②

۵۲ ①

گزینه ۲ ☒

تعداد مضرب‌های ۱۷ در مجموعه‌ی $\{100, 101, 102, \dots, 999\}$ مورد نظر بوده که با استفاده از نکته‌ی قبل پراپراست؛

$$\left\lfloor \frac{999}{17} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{17} \right\rfloor = 58 - 5 = 53$$



هنگامی که در مبحث ب.م.م یا ک.م.م به دنبال مجهولاتی هستیم، معمولاً استفاده از تکنیک زیر جستجو را بسیار محدود کرده و در نتیجه دسترسی به جواب آسان تر خواهد شد.

نکته ۱۶

تکنیک a' و b' :

ابتدا توجه کنید:

اگر a و b دو عدد صحیح و $(a, b) = d$ باشد، آنگاه $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ است.

اکنون فرض کنید $(a, b) = d$ باشد، آنگاه:

- قرار می‌دهیم: $\frac{b}{d} = b'$ و $\frac{a}{d} = a'$.
- طبق مرحله‌ی قبل خواهیم داشت: $a = a'd$ و $b = b'd$ و البته: $(a', b') = 1$.

همیشه:

به جای این که دنبال اعداد نسبتاً بزرگ a و b بگردید، بهتر است دنبال عددهای کوچک‌تر a' و b' بگردید!

تست: مجموع دو عدد طبیعی ۵۰۴ و ب.م.م آن‌ها ۳۶ است. کمترین مقدار برای تفاضل آن دو عدد کدام است؟

۱۴۴ ④

۱۰۸ ③

۷۲ ②

۳۶ ①

گزینه ۴ ✓

دو عدد را a و b گرفته و طبق تکنیک قبل قرار می‌دهیم:

$$a = 36a', \quad b = 36b', \quad (a', b') = 1$$

اکنون طبق فرض می‌نویسیم:

$$a + b = 504 \rightarrow 36(a' + b') = 504 \rightarrow a' + b' = 14$$

واضح است که عددهای طبیعی کمی وجود دارند که جمع آن‌ها ۱۴ بوده و علاوه نسبت به هم اول باشند. چون می‌خواهیم حاصل:

$$a - b = (a' - b') \times 36$$

کمترین مقدار ممکن باشد، باید a' و b' تا حد ممکن به هم نزدیک انتخاب شوند و در نتیجه $a' = 9$ و $b' = 5$ خواهند بود. لذا:

$$\min(a - b) = (9 - 5) \times 36 = 144$$



نکته ۱۷

ک.م.م بر حسب a' و b' :ک.م.م برابر $a'b'd$ است، زیرا:

$$[a, b] = \frac{a'd \times b'd}{d} \Rightarrow [a, b] = a'b'd$$

بویژه:

اگر $(a, b) = 1$ باشد، آنگاه $[a, b] = ab$ است.تست: اگر $[a, 84] = 252$ باشد، کوچکترین مقدار a کدام است؟

۱۸ ④

۹ ③

۶ ②

۳ ①

گزینه ۳ ☒

توجه کنید تجزیه‌ی عددهای ۸۴ و ۲۵۲ به صورت زیر است:

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7 \quad \text{و} \quad 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

بنابراین عدد a باید حداقل عبارت 3^2 را در تجزیه‌ی خود داشته باشد تا ک.م.م دو عدد طبق روش گفته شده ۲۵۲ بدست آید:

$$[a, 84] = [3^2, 2^2 \times 3 \times 7] = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$$

تست: ب.م.م دو عدد ۲۳ و ک.م.م آنها ۲۰۹۳ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۴۳۷ ④

۳۹۱ ③

۲۹۹ ②

۲۵۳ ①

گزینه ۲ ☒طبق تکنیک a' و b' می‌نویسیم:

$$[a, b] = a'b'd \rightarrow 2093 = 23a'b' \rightarrow a'b' = 91$$

چون $91 = 13 \times 7$ است، عدد بزرگ‌تر چنین مشخص می‌شود:

$$a' = 13 \rightarrow a = a'd = 13 \times 23 \Rightarrow a = 299$$

تست: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b از رابطه‌ی $M = 5a + 14$ بدست می‌آید. بیشترین مقدار تفاضل دو عدد

کدام است؟

۶۳ ④

۲۲ ③

۴۲ ②

۷۰ ①

گزینه ۱ ☒طبق تکنیک a' و b' می‌نویسیم:

$$M = 5a + 14 \rightarrow a'b'd = 5a'd + 14 \rightarrow a'd(b' - 5) = 14$$

برای آن‌که تفاضل دو عدد بیشترین مقدار ممکن شود، باید در عبارت $a'd(b' - 5) = 14$ مقدار d بزرگ‌ترین مقدار ممکن باشد:

$$d = 14: a'(b' - 5) = 1 \rightarrow \begin{cases} a' = 1 \Rightarrow a = 14 \\ b' - 5 = 1 \Rightarrow b' = 6 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

پنابراین بیشترین تفاضل دو عدد $14 - 14 = 0$ خواهد بود.



تست: اگر a و b دو عدد طبیعی بوده، $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ و $ab + [a, b] = 72$ ، آنگاه $a + b$ کدام است؟

۲۸ ④

۲۱ ③

۱۴ ②

۷ ①

گزینه ۲ ☒

طبق تکنیک a' و b' می‌نویسیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a'd}{b'd} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4}$$

توجه کنید که شرط $(a', b') = 1$ دقیقاً معادل این است که کسر $\frac{a'}{b'}$ تا حد ممکن ساده شده است. پس تساوی $\frac{a'}{b'} = \frac{3}{4}$ نتیجه می‌دهد

که $a' = 3$ و $b' = 4$ خواهد بود. اکنون طبق تساوی $ab + [a, b] = 72$ می‌نویسیم:

$$a'db'd + a'b'd = 72 \xrightarrow{a'=3, b'=4} 12d^2 + 12d - 72 = 0 \Rightarrow d^2 + d - 6 = 0$$

از حل معادله‌ی اخیر $d = -3$ و $d = 2$ بدست خواهند آمد که چون d عددی طبیعی است، فقط $d = 2$ قابل قبول بوده و بنابراین:

$$a + b = (a' + b')d = (3 + 4) \times 2 = 14$$



نکته ۱۸

اگر a و b اعدادی صحیح و n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

- همواره رابطه‌ی $a - b \mid a^n - b^n$ برقرار است.
- اگر n فرد باشد، آنگاه: $a + b \mid a^n + b^n$.
- اگر n زوج باشد، آنگاه: $a + b \mid a^n - b^n$.

تست: اگر $a^2 \mid b - c$ ، آنگاه کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

۴ $a^n \mid b^n - c^n$ ۳ $a^2 \mid b^n - c^n$ ۲ $a^2 \mid b^n + c^n$ ۱ $a^n \mid b - c$ گزینه ۳ ☒

چون همواره داریم $b - c \mid b^n - c^n$ ، با توجه به فرض $a^2 \mid b - c$ ، خواهیم داشت: $a^2 \mid b^n - c^n$.



تست: تعداد عضوهای مجموعه $\{n: 65 \mid 2^n + 1\}$ از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۹ ④

۸ ③

۷ ②

۶ ①

گزینه ۳ ☒

رابطه‌ی $65 \mid 2^n + 1$ معادل است با این که $2^n + 1 \mid 2^6 + 1$. با توجه به نکته‌ی قبل، $2^6 + 1$ عدد به فرم $2^{6k} + 1 = (2^6)^k + (1)^k$ را با شرط فرد بودن k عاد می‌کند. پس برای این که $65 \mid 2^n + 1$ برقرار باشد، باید n مضرب فرد ۶ باشد. یعنی:

$$n = 6, 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90$$





تمرین تست:

۱- کدام یک از موارد زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

- ① مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۱ دارد.
- ② اگر n^2 مضرب ۸ باشد، آنگاه n مضرب ۴ است.
- ③ برای هیچ دو عدد اول p و q ، عدد $p+q$ اول نیست.
- ④ عدد ۱۲ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۲- اگر a ، b و c اعدادی اول و غیر از ۲ باشند، کدام عدد لزوماً اول نیست؟

- ① $a(b+1)+1$
- ② $2a+b+c+1$
- ③ $abc-1$
- ④ $ab+ac+bc$

۳- کدام گزینه نادرست است؟

- ① اگر x و y گنگ باشند، آنگاه xy گنگ است.
- ② اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x-y$ گنگ است.
- ③ $8^n - 1$ همواره مضرب ۷ است.
- ④ اگر x و y گویا باشند، آنگاه xy گویا است.

۴- کدام عبارت نادرست است؟

- ① عبارت $x^2 + x + 7$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.
- ② اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، آنگاه $x+y \geq 3\sqrt{xy}$.
- ③ اگر $x \geq 1$ ، آنگاه $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- ④ عبارت $-x^2 + 2x - 6$ همواره منفی است.

۵- اگر x بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{x - 2y + 2 \mid y \in A\}$ کدام است؟

- ① ۲
- ② x
- ③ $2-x$
- ④ $2+x$

۶- اگر $5n-3 \mid n+2$ ، در این صورت چند جواب صحیح برای n وجود دارد؟

- ① ۱۰
- ② ۸
- ③ ۶
- ④ ۴

۷- برای چند عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + 3$ بر $n - 3$ بخش پذیر است؟

- ۱۲ ① ۸ ② ۶ ③ ۴ ④

۸- نمودار تابع $y = \frac{x^3 - 3}{x - 3}$ از چند نقطه با مختصات صحیح عبور می کند؟

- ۱۲ ① ۸ ② ۱۶ ③ ۱۴ ④

۹- مجموع ارقام بزرگترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی مانده توان دوم خارج قسمت است، چیست؟

- ۱۲ ① ۱۱ ② ۱۶ ③ ۱۴ ④

۱۰- در یک تقسیم ۵۲ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم علیه اضافه کرده ایم. اگر خارج قسمت و باقی مانده تغییر نکند، خارج قسمت کدام است؟

- ۱۲ ① ۱۳ ② ۲۵ ③ ۲۶ ④

۱۱- اگر a عددی زوج باشد، عدد $a(a^2 - 4)$ همواره بر کدام عدد بخش پذیر است؟

- ۱۵ ① ۴۸ ② ۳۲ ③ ۳۶ ④

۱۲- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷، باقی مانده ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (کنکور ۸۴)

- ۱۲ ① ۹ ② ۱۶ ③ ۱۴ ④

۱۳- بزرگترین عضو مجموعه ی $A = \{a: ۲a \mid ۷۲, ۵a \mid ۶۰۰\}$ کدام است؟

- ۱۲ ① ۱۸ ② ۲۴ ③ ۳۶ ④

۱۴- اگر p عددی اول و دو رقمی باشد، مقدار $(۴۰p^2, ۱۴۷)$ کدام است؟

- ۲۱ ① p ② ۱ ③ ۸ ④

۱۵- کدام مورد همواره صحیح نیست؟

- $a + b \mid [a, b]$ ① $a \mid b \Rightarrow a \mid [b, b+1]$ ②
 $b \mid a \Rightarrow [a, b] = |a|$ ③ $(a, b) \mid [a, b]$ ④

۱۶- حاصل ضرب دو عدد اول برابر ۳۹۸ است. مجموع این دو عدد بر کدام بخش پذیر است؟

- ۲ ① ۳ ② ۹ ③ هیچکدام ④

۱۷- اگر a و b اعدادی طبیعی و $a^2 - b^2$ عددی اول باشد، آنگاه کدام همواره صحیح است؟

- ① a و b هر دو اول
 ② a یا b اول
 ③ $a = b + 2$
 ④ $a = b + 1$

۱۸- عدد $\overline{aabb}$ همواره بر کدامیک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

- ① ۵
 ② ۷
 ③ ۳
 ④ ۱۱

۱۹- اگر $a^2 | 135$ و $b^3 | 112$ ، کمترین مقدار برای $a + b$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- ① ۲۹
 ② ۷۳
 ③ ۵۳
 ④ ۵۹

۲۰- اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2 + 9n + 21$ و $n + 7$ کدام است؟

- ① ۱
 ② ۱ و ۳
 ③ ۱ و ۵
 ④ ۷

۲۱- اگر n عدد طبیعی و دو عدد $9n - 5$ و $n + 4$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر از ۱ باشند، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

- ① ۱
 ② ۲
 ③ ۳
 ④ ۴

۲۲- به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، دو عدد به صورت های $25n + 9$ و $11n + 4$ نسبت به هم اول اند؟ (کنکور ۸۹)

- ① ۸۶
 ② ۸۷
 ③ ۸۹
 ④ ۹۰

۲۳- مجموع دو عدد 2772 و بزرگترین مقسوم علیه (مشترک) آن ها 231 و مخالف عدد کوچک تر است. تفاضل این دو عدد کدام است؟ (کنکور ۹۴)

- ① ۲۳۱
 ② ۴۶۲
 ③ ۶۹۳
 ④ ۹۲۴

۲۴- حاصل $[1]_4 \cup [3]_4$ برابر کدام است؟

- ① $[1]_4$
 ② $[1]_p$
 ③ $[0]_p$
 ④ $\mathbb{Z}$

۲۵- برای درستی گزاره ی « $n^2 + 3n + 13$ به ازای هر عدد طبیعی n ، عددی اول است.» می توان از روش استفاده کرد.

- ① اثبات - در نظر گرفتن همه ی حالت ها
 ② اثبات - برهان خلف
 ③ رد - مثال نقض
 ④ رد - برهان خلف



ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱- منحنی $4x^2 - 3xy - 2y + 1 = 0$ از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

- ① ۶ ② ۴ ③ ۳ ④ صفر

۲- کدام عدد سه رقمی زیر نمی‌تواند مربع یک عدد باشد؟

- ① $\overline{ab6}$ ② $\overline{ab1}$ ③ $\overline{ab4}$ ④ $\overline{ab7}$

۳- به‌ازای چند عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + 4$ اول است؟

- ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ صفر

۴- برای چند عدد صحیح n ، ب.م.م دو عدد $n^2 + n$ و $n^2 - n$ برابر ۹ است؟

- ① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۵- چند عدد طبیعی دو رقمی n وجود دارد که ک.م.م دو عدد n و ۱۰ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد؟

- ① ۴۰ ② ۳۹ ③ ۲۲ ④ ۲۱

۶- برای عددهای صحیح a و b داریم: $13 \mid a + 3b + k$ و $13 \mid 5a + 2b + 17$. کوچک‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟

- ① ۳ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۳

۷- اگر ترکیب‌های خطی دو عدد a و ۱۵ (یعنی: عبارات به شکل $ax + 15y$) تمام اعداد صحیح را تولید کنند، ب.م.م دو عدد $2a$ و ۲۱۰ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

- ① ۲ یا ۶ ② ۲ یا ۱۴ ③ ۲ یا ۶ یا ۱۴ ④ فقط ۲