**رابطه‌ها و گراف‌ها**

**رابطه:** هر زیرمجموعه از $A\times B$ را یک رابطه از $A$ به روی $B$ می‌گوییم. اگر رابطه‌ای زیرمجموعه‌ای از $A\times A$ باشد، آنگاه می‌گوییم آن رابطه بر روی مجموعه‌ی $A$ تعریف شده است.

مثال‌هایی از رابطه، به صورت‌های زیر است:

۱) $aRb$ یا $(a,b)\in R$، هرگاه $a\le b$ .

طبق تعریف بالا $(۲,۵)\in R$ ولی $(۴,۱)\notin R$.

۲) برای هر دو عضو $x,y\in Z$ تعریف می‌کنیم: $(x,y)\in R$ یا $xRy$ هرگاه $x-y$ مضربی از ۷ باشد.

طبق تعریف بالا ۹R۲ ولی ۱۲$\cancel{R}$۶.

**مثال ۱:** رابطه‌ی $R$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی به صورت $xRy \Leftrightarrow x^۲+y^۲\le ۲xy$ تعریف شده است. عدد ۱۳۹۳ با چه عددی رابطه دارد؟

**ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه**

اگر رابطه‌ی $R$ بر روی مجموعه‌ی $A$ تعریف شده باشد، آن‌گاه آن رابطه:

۱) دارای خاصیت بازتابی (انعکاسی) است اگر و تنها اگر به ازای هر عضوی مانند $x$ متعلق به $A$، زوج مرتب $(x,x)$ در $R$ باشد.

۲) دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x$ و $y$ متعلق به $A$ در صورت موجود بودن زوج مرتب $(x,y)$ در $R$، زوج مرتب $(y,x)$ نیز در $R$ موجود باشد.

۳) دارای خاصیت پادتقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x$ و $y$ متمایز متعلق به $A$ از دو زوج مرتب $(x,y)$ و $(y,x)$ حداکثر یکی از آن دو در $R$ باشد. (به عبارتی اگر $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ آنگاه $x=y$)

۴) دارای خاصیت تعدی (تراگذری یا ترایایی) است اگر و تنها اگر به ازای هر $x$ و $y$ و $z$ متعلق به $A$، در صورت موجود بودن هر دو زوج مرتب $(y,z)$ و $(x,y)$ در $R$، زوج مرتب $(x,z)$ نیز در $R$ موجود باشد.

**هم‌ارزی:** رابطه‌ای که هر سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطه‌ی هم‌ارزی است.

**نکته:** رابطه‌ی تهی، هر سه ویژگی تقارنی، پادتقارنی و تعدی را دارد.

**نکته:** رابطه‌ای که فقط دارای یک زوج مرتب باشد، هر دو ویژگی پادتقارنی و تعدی را داراست. اگر مولفه‌های اول و دوم آن زوج مرتب یکسان باشد، آن رابطه ویژگی تقارنی را نیز خواهد داشت.

**نکته:** تنها رابطه‌ای که می‌توان بر روی $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ تعریف کرد تا هر چهار ویژگی بازتابی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی را داشته باشد رابطه‌ی $\{(a_۱,a_۱),(a_۲,a_۲),...,(a_n,a_n)\}$ می‌باشد.

**مثال ۲:** مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ داده شده است. رابطه‌ای روی $A$ تعریف کنید که:

۱) بازتابی باشد.

۲) متقارن باشد.

۳) تعدی باشد

۴) پادتقارن باشد
۵) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد.
۶) فقط خاصیت پادتقارنی داشته باشد.
۷) نه متقارن باشد و نه پادمتقارن.
۸) هم متقارن باشد و هم پادمتقارن.
۹) متقارن و بازتابی باشد ولی تراگذر نباشد.

**مثال ۳:** کدام‌یک از روابط زیر، خاصیت هم‌ارزی دارند؟
۱) رابطه‌ی تساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.
۲) رابطه‌ی توازی در مجموعه‌ی خطوط یک صفحه.
۳) رابطه‌ی عمود بودن در مجموعه‌ی خطوط یک صفحه.
۴) رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.
۵) رابطه‌ی $R$ با ضابطه‌ی $xRy \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ \le ۲xy$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

## گراف جهت‌دار متناظر به یک رابطه

اگر $R$ یک رابطه روی مجموعه‌ی $A$ باشد، می‌توان به آن رابطه یک گراف جهت دار نسبت داد به طوری که مجموعه‌ی رئوس این گراف همان مجموعه‌ی $A$ باشد و یال جهت دار $\overrightarrow{ab}$ در گراف موجو باشد اگر و تنها اگر زوج مرتب $(a,b)$ در $R$ باشد.

**مثال ۴:** گراف جهت‌دار متناظر با رابطه‌ی زیر را رسم کنید. $R = \{(a,b),(b,b),(b,d),(c,e),(e,c),(e,d)\}$.

## بررسی ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه از روی گراف متناظر با آن

اگر رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $A$ تعریف شده باشد، آنگاه رابطه‌ی $R$:
۱) یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن در هر راس، دارای یک طوقه باشد.
۲) یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر، به ازای هر $i$ و $j$ متعلق به $A$، در صورت موجود بودن یال جهت دار $\overrightarrow{ij}$، یال جهت دار $\overrightarrow{ji}$ نیز موجود باشد.
۳) یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر، به ازای هر $i$ و $j$ متعلق به $A$، اگر یال $\overrightarrow{ij}$ موجود بود آن‌گاه یال $\overrightarrow{ji}$ موجود نباشد.
۴) یک رابطه تعدی است اگر و تنها اگر، به ازای هر $i$ و $j$ و $k$ متعلق به $A$، اگر یال‌های $\overrightarrow{ij}$ و $\overrightarrow{jk}$ موجود بودند، آن‌گاه یال $\overrightarrow{ik}$ نیز موجود باشد.

**مثال ۵:** رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $A = \{۳,۶,۷,۱۱\}$، به صورت $R = \{(x,y) \ | \ x \mid y\}$ تعریف شده است.
الف) رابطه‌ی $R$ را مشخص کنید.
ب) گراف جهت‌دار متناظر با $R$ را رسم کنید.
ج) آیا $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟ چرا؟

**مثال ۶:** رابطه‌ی متناظر به گراف جهت دار زیر چه تعداد از ویژگی‌های چهارگانه را داراست؟

**نکته:** اگر مجموعه‌ی $A$ دارای $n$ عضو باشد، در این صورت می‌توان $2^{n^2}$ رابطه روی $A$ تعریف کرد.

**نکته:** هر رابطه یک و فقط یک گراف جهت‌دار دارد.

**نکته:** با $p$ راس مشخص، $2^{p^2}$ گراف جهت دار می‌توان ساخت.

**مثال ۷:** با ۵ راس $e, d, c, b, a$ چند گراف جهت دار می‌توان ساخت؟

### ماتریس متناظر به یک رابطه

اگر $R$ رابطه‌ای روی مجموعه‌ی $n$ عضوی $A$ باشد، می‌توان به آن رابطه یک ماتریس مربعی مثل $M$ از مرتبه‌ی $n$ نسبت داد به طوری که اگر $iRj$ آن‌گاه درایه‌ی $m_{ij}$ ماتریس، برابر با ۱ و در غیر این‌صورت برابر با صفر خواهد بود.

**مثال ۸:** اگر رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد، ماتریس متناظر با رابطه‌ی $R$ را بنویسید. $R=\{(c,d),(a,b),(b,b),(b,c),(d,a)\}$

### اعمال بولی

اعمال جمع و ضرب بولی روی مجموعه‌ی $\{0,1\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$0\oplus 0=0 \qquad 0\oplus 1=1 \qquad 1\oplus 0=1 \qquad 1\oplus 1=1$$
$$0\odot 0=0 \qquad 0\odot 1=0 \qquad 1\odot 0=0 \qquad 1\odot 1=1$$

### توان دوم یک ماتریس

اگر $M(R)$ ماتریس متناظر یک رابطه باشد، در این صورت ماتریس $[M(R)]^2$ از ضرب بولی ماتریس $M$ در خودش به دست خواهد آمد با این تفاوت که هنگام ضرب هر درایه که مقدار آن غیر صفر باشد، ۱ منظور خواهد شد و در غیر این صورت مقدار آن درایه صفر خواهد بود.

**مثال ۹:** اگر $M=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $M^2$ را بیابید.

### ترکیب یک رابطه با خودش

اگر رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $A$ تعریف شده باشد، آن‌گاه ترکیب رابطه‌ی $R$ با خودش که آن را به صورت $ROR$ نمایش می‌دهیم عبارت است از رابطه‌ای که آن رابطه شامل زوج مرتب $(i,j)$ باشد اگر و تنها اگر عضوی مانند $k$ در $A$ یافت شد که $(k,j)$ و $(i,k)$ هر دو در $R$ باشند.

**مثال ۱۰:** رابطه‌ی $R$ روی $\{1,2,3,4\}$ به صورت زیر تعریف شده است. رابطه‌ی $ROR$ را به دست آورید.

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

**نکته:** اگر $M(R)$ ماتریس متناظر به رابطه‌ی $R$ باشد، آن‌گاه $M^2(R)=M(ROR)$.

**مثال ۱۱:** رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $A=\{-1,0,2,3\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow |b|\le a$

الف) گراف جهت‌دار $R$ را رسم کنید و تحقیق کنید که پادمتقارن است یا خیر؟

ب) ماتریس $M(R)$ را نوشته و ربطه‌ی $RoR$ را با عضوهایش نشان دهید.

### مقایسه‌ی دو ماتریس

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی E و F هر دو دارای درایه‌های صفر و یک باشند، آن‌گاه ماتریس E را کوچک‌تر یا مساوی F گوییم هرگاه به ازای هر i و j، درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس E از درایه‌ی متناظرش در F کوچک‌تر یا مساوی باشد و آن را به صورت $E \ll F$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۱۲:** اگر $E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه چند ماتریس مانند F وجود دارد به طوری که $E \ll F$؟

**مثال ۱۳:** تعداد ماتریس‌های صفر و یک مانند $F$ با شرط $E \ll F$ و $E \neq F$ را برای ماتریس زیر بنویسید.

$$E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

**نکته:** ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و $M^T$ نظیر به نظیر با ضرب مولفه به مولفه تشکیل می‌شود.

### بررسی ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه از روی ماتریس متناظر به آن گراف

اگر رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی n عضوی A تعریف شده باشد، آن‌گاه آن رابطه:

۱) دارای خاصیت بازتابی است اگر و تنها اگر تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ باشد. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $۲^{n^۲-n}$ رابطه‌ی بازتابی می‌توان تعریف کرد)

۲) دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر ماتریس M متقارن باشد. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $۲^{\frac{n^۲+n}{۲}}=۲^n \times ۲^{\frac{n^۲-n}{۲}}$ رابطه‌ی تقارنی می‌توان تعریف کرد)

۳) دارای خاصیت پادتقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر i و j متمایز، از دو درایه‌ی $m_{ij}$ و $m_{ji}$ حداکثر یکی از آن دو برابر با ۱ باشد؛ به عبارتی $M \wedge M^T \ll I_n$. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $۲^n \times ۳^{\frac{n^۲-n}{۲}}$ رابطه‌ی پادتقارنی می‌توان تعریف کرد)

۴) دارای خاصیت تعدی است اگر و تنها $M^۲ \ll M$.

### اصل شمول و عدم شمول

در جبر مجموعه‌ها به رابطه‌ی زیر، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم.

**الف) اصل شمول:**

$$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|$$

**ب) اصل عدم شمول:**

$$|\overline{A \cup B}|=|S|-|A \cup B|$$

**نکته:** $(|\overline{A \cup B}|=|\overline{A} \cap \overline{B}|)$

**مثال ۱۴:** چند عضو مجموعه‌ی $A=\{x \in N \mid ۱ \le x \le ۸۰۰\}$ نه بر ۷ بخش‌پذیر هستند و نه بر ۱۱.

**مثال ۱۵:** چند عدد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که بر ۷ و ۵ تقسیم پذیر نیستند؟

**نکته:** تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $x_1+x_2+...+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$.

**نکته:** تعداد جواب‌های صحیح مثبت (طبیعی) $x_1+x_2+...+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

**مثال ۱۶:** معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

**مثال ۱۷:** معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

**مثال ۱۸:** به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع بستنی متفاوت، ۸ نوع بستنی انتخاب کرد به شرط آن‌که از هر نوع بستنی حداقل یک عدد انتخاب شود؟

**مثال ۱۹:** تعداد جمله‌های بسط $(x+y+z)^{10}$ را بیابید.

**مثال ۲۰:** معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ با شرط $x_2\geq 2\ ,\ x_4\geq 1$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

**مثال ۲۱:** تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=14$ را با شرایط $x_1>1\ ,\ x_2>2\ ,\ x_3>3$ تعیین کنید.

**مثال ۲۲:** تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=14$ را با شرط $x_i>2$ برای $i=1,2,3$ بیابید.

**نکته:** تعداد جواب‌های صحیح مثبت (طبیعی) نامعادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k<n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}=n$. یعنی برابر است با $\binom{n-1}{k}$.

**مثال ۲۳:** تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x+y+z<7$ را بیابید.

**نکته:** تعداد جواب‌های صحیح نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k<n$ با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}=n$ با شرط $x_{k+1}\geq 1$ یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}=n-1$ برابر است. یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k}$.

**مثال ۲۴:** تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4<6$ را بیابید.

**نکته:** تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از $n$ را که نسبت به آن اول باشند، با $\varphi(n)$ نمایش می‌دهیم و در حالتی که آن عدد به صورت $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزی شده باشد، $\varphi(n)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. $\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k})$.

**مثال ۲۵:** تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۵۰۰ را که نسبت به ۵۰۰ اولند محاسبه کنید.