



کنکور آسان است
KONKURSara



/konkursara



@konkursara_official

021-55756500
www.konkursara.com

بخش پذیری و تقسیم

عضو ابتدای یک مجموعه: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد x را عضو ابتدای A می‌گوییم و می‌نویسیم

$$\min A = x$$

۱. x عضو A باشد.

۲. x از تمام اعضای A کوچک‌تر یا مساوی باشد.

عضو انتهای یک مجموعه: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد x را عضو انتهای A می‌گوییم و می‌نویسیم

$$\max A = x$$

۱. x عضو A باشد.

۲. x از تمام اعضای A بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

نکته: ممکن است یک مجموعه عضو ابتدا و یا انتها نداشته باشد.

مثال ۱: وجود عضو ابتدا و انتها را در مجموعه‌های زیر بررسی کنید.

$$1) A = \{x \in R \mid -2 < x \leq 9\}$$

$$2) B = \{x \in R \mid -2 \leq x < 9\}$$

$$3) C = \{x \in Z \mid -2 < x \leq 9\}$$

اصل خوش ترتیبی: هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای عضو ابتدا (کوچک‌ترین عضو) است.

اصل استقرای ریاضی: اگر زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیرمجموعه باشد.

۲. در صورت موجود بودن عدد طبیعی مانند t در آن زیرمجموعه، عدد طبیعی $t+1$ نیز در آن زیرمجموعه باشد.

اصل استقرای قوی ریاضی: اگر زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیرمجموعه باشد.

۲. در صورت موجود بودن همه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از t در آن زیرمجموعه، عدد طبیعی t نیز در آن زیرمجموعه باشد.

بخش پذیری: عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیر صفر b بخش پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان

یافت شود که $a = b \times q$. بخش پذیری a بر b را به صورت $b \mid a$ نشان می‌دهیم و بخش پذیر نبودن a بر b را به

$$b \nmid a \Leftrightarrow a = bq \quad (q \in Z)$$

صورت $b \nmid a$ نشان می‌دهیم.

قرارداد: چون بی شمار عدد صحیح مانند q یافت می‌شود که در تساوی $q \times 0 = 0$ صدق می‌کند، قرارداد می‌کنیم که صفر بر خودش بخش پذیر است یعنی $0 \mid 0$.

ویژگی‌های بخش‌پذیری:

(در تمام فرمول‌های زیر، پایه‌ها، اعداد صحیح و توان‌ها، اعداد طبیعی‌اند.)

۱) $a \mid a$

۲) $a \mid 1 \Rightarrow a = 1 \text{ or } a = -1$

۳) $a \mid a$

۴) $a \mid 0$

۵) $a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$

۶) $a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$

۷) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

۸) $a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$

۹) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

۱۰) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

۱۱) $a \mid b \xrightarrow{m < n} a^m \mid b^n$

۱۲) $a^m \mid b^n \xrightarrow{m > n} a \mid b$

۱۳) $a \mid b, a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid b \pm c \\ a \mid b \times c \\ a \mid mb \pm nc \end{cases}$

۱۴) $a \mid b, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

۱۵) $a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

۱۶) $a \mid b \Rightarrow a \mid ma \pm nb$

۱۷) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c, b \mid c$

۱۸) $(a-b) \mid (a^n - b^n)$

۱۹) $\frac{n}{m} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$

۲۰) $\frac{n}{m} = 2k + 1 \Rightarrow (a^m + b^m) \mid (a^n + b^n) \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow (a+b) \mid (a^n + b^n)$

۲۱) $\frac{n}{m} = 2k \Rightarrow (a^m + b^m) \mid (a^n - b^n) \Rightarrow n = 2k \Rightarrow (a+b) \mid (a^n - b^n)$

۲۲) حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.مثال ۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم $14^{1394} - 8^{1394}$ را بر ۶ بیابید.مثال ۳: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a = 3^{\alpha} - 2^{\beta}$ را بر ۳۵ بیابید.

مثال ۴: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $a \mid b \Rightarrow a^r \mid b^r$

۲) $a^r \mid b^r \Rightarrow a \mid b$

مثال ۵: تمام مقادیر صحیح n را چنان بیابید که حاصل $\frac{4n-2}{n+1}$ یک عدد صحیح باشد.

مثال ۶: اگر $\frac{n+4}{n+1}$ یک عدد صحیح باشد آن‌گاه برای n چند جواب صحیح وجود دارد؟

مثال ۷: چند عدد صحیح مانند a می‌توان یافت به طوری که در هر دو رابطه‌ی $a|240$ و $12|a$ صدق کنند.

مثال ۸: چند عدد طبیعی مانند d وجود دارد که $d|450$ و $15|d$.

قضیه‌ی تقسیم: اگر a عدد صحیح و b یک عدد طبیعی دلخواه باشند، آن‌گاه دو عدد صحیح منحصر به فردی مانند r و q چنان یافت می‌شوند که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$. در این حالت q را خارج قسمت، r را باقی‌مانده، a را مقسوم و b را مقسوم‌علیه می‌گوییم.

مثال ۹: عدد -487 را بر 23 تقسیم کرده و باقی‌مانده و خارج قسمت را تعیین کنید.

نکته: هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از دو صورت $2k$ و $2k+1$ و یا به یکی از سه صورت $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ نمایش داد.

نکته: مربع هر عدد زوج، مضرب 4 می‌باشد.

نکته: باقی‌مانده‌ی یک عدد در تقسیم بر 4 ، باقی‌مانده‌ی عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر 4 می‌باشد.

نکته: باقی‌مانده‌ی یک عدد در تقسیم بر 8 ، باقی‌مانده‌ی عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر 8 می‌باشد.

نکته: مربع هر عدد فرد در تقسیم بر 8 باقی‌مانده‌ی یک می‌آورد. به عبارت دیگر $a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 8q+1$

مثال ۱۰: کدام‌یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

۷۴۵۴۹ (۴)

۷۴۵۳۹ (۳)

۷۴۵۲۹ (۲)

۷۴۵۱۹ (۱)

مثال ۱۱: از بین اعداد 1 و 11 و 111 و 1111 و ... چه تعدادی مربع کامل هستند؟

نکته: هیچ مربع کاملی نمی‌تواند به یکی از ارقام 2 و 3 و 7 و 8 ختم شود.

نکته: اگر مربع کاملی به 5 ختم شود، لازم است رقم دهگان آن مربع کامل برابر 2 باشد.

نکته: تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ برابر $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$ می‌باشد.

مثال ۱۲: چند عدد طبیعی مضرب 3 کوچکتر یا مساوی 100 وجود دارد؟

نکته: تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $k+1, k+2, \dots, k+n$ برابر $\left\lceil \frac{k+n}{b} \right\rceil - \left\lceil \frac{k}{b} \right\rceil$ می‌باشد.

مثال ۱۳: تعداد اعداد سه رقمی که بر 34 بخش‌پذیر باشند چقدر است؟

مثال ۱۴: معادله‌ی $x^3 + y^3 = 1383$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

مثال ۱۵: در یک تقسیم، باقی‌مانده برابر 29 و خارج قسمت برابر 7 می‌باشد. حداقل چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد بدون این‌که مقسوم و خارج قسمت تغییر نماید؟

مثال ۱۶: در یک تقسیم، اگر 200 واحد به مقسوم و 3 واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقی‌مانده 22 واحد کم می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

مثال ۱۷: در یک تقسیم، مقسوم ۵۴۲ و خارج قسمت ۱۲ می‌باشد. تعیین کنید مقسوم علیه چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

مثال ۱۸: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۵ و ۶ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

عدد اول:

یک عدد طبیعی را اول گوییم هرگاه در مجموعه اعداد طبیعی، دو و فقط دو مقسوم علیه مثبت داشته باشد که یکی از آن دو مقسوم علیه عدد ۱ و دیگری خود آن عدد است. عددی که اول نباشد، مرکب خوانده می‌شود.

نکته: هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو شکل $6k+1$ و $6k-1$ (یا $6q+5$ و $6q-1$) می‌باشد. (به عبارتی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۶، عددی بجز ۱ و ۵ باشد، آن عدد اول نیست). در عین حال، ممکن است عددی به شکل $6k+1$ و $6k-1$ باشد ولی اول نباشد؛ مثل $1 \times 4 + 1 = 5$.

نکته: تنها عدد اولی که زوج است عدد ۲ می‌باشد. (اعداد اول: ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ...)

مثال ۱۹: مجموع دو عدد اول برابر ۹۱ شده است. مجموع ارقام حاصل ضرب آن دو عدد را بیابید.

مثال ۲۰: دو عدد طبیعی a و b چنانند که $a^2 + b^2 = 41$ ، مجموع ارقام عدد $a+2b$ را بیابید.

قضیه: بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. (مجموعه اعداد اول مجموعه‌ای نامتناهی است)

قضیه: عدد n اول است هرگاه به هیچ یک از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی \sqrt{n} بخش‌پذیر نباشد.

تجزیه‌ی یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول:

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرد.

نکته: اگر پس از تجزیه‌ی یک عدد، توان تمام عامل‌های اول عددی زوج باشند، آن عدد، مربع کامل است و اگر مضرب سه باشند، مکعب کامل است.

مثال ۲۱: با توجه به تجزیه‌ی عدد 1380 ، مربع کامل بودن آن را بررسی کنید.

نکته: اگر عدد n به صورت $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه شده باشد، آن‌گاه تعداد تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n برابر $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ خواهد بود.

مثال ۲۲: تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد 50 را بیابید.

مثال ۲۳: کدام‌یک از اعداد زیر دارای ۲۷ مقسوم‌علیه مثبت می‌باشد؟

۲۱۷۸ (۴)

۱۸۶۲ (۳)

۱۷۶۴ (۲)

۱۹۶۳ (۱)

نکته: تعداد عوامل اول p موجود در n از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

مثال ۲۴: در تجزیه‌ی عدد 5^0 ، توان عدد ۳ چند است؟مثال ۲۵: تعداد صفرهای واقع در انتهای عدد $n!$ با تعداد عوامل ۵ موجود در $n!$ یعنی مقدار زیر برابر است.

$$\left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{5^2} \right] + \left[\frac{n}{5^3} \right] + \dots$$

مثال ۲۶: تعداد صفرهای موجود در انتهای $79!$ چقدر است؟مثال ۲۷: بیشترین مقدار k برای آن که 19^k بر 21^k بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد

برای به دست آوردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان کمتر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.
ب.م.م دو عدد a و b را با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۸: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد 45^0 و $10^0 8$ را بیابید.نکته: $(a, b) = d \Rightarrow d | a$, $d | b$ مثال ۲۹: اگر $(3a+5, 5a+4) = d$ ، آن‌گاه مقدار d را بیابید.مثال ۳۰: اگر $(a-5, a^2 - 6a + 3) = d$ ، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

نکته: مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد a و b با مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ب.م.م آن دو عدد برابر است؛ یعنی اگر $x | a$ و $x | b$ آن‌گاه $x | (a, b)$.

مثال ۳۱: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b برابر با ۷۲ می‌باشد. آن دو عدد چند مقسوم‌علیه مشترک دارند؟ترکیب خطی دو عدد: به ازای هر $ma + nb$ ، $m, n \in \mathbb{Z}$ را یک ترکیب خطی a و b می‌گوییم.نکته: $(a, b) = d \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb = d$ دو عدد متباین (نسبت به هم اول): دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a, b) = 1$.

نکته: اگر برای اعداد صحیح a و b ، اعداد صحیح مانند r و s چنان یافت شوند که $ra + sb = 1$ ، آن‌گاه $(a, b) = 1$

نکته: اگر a در تقسیم بر b باقیمانده‌ی r داشته باشد، آن‌گاه $(a, b) = (b, r)$ مثال ۳۲: اگر $(a, b) = d$ ، آن‌گاه $(a, 5a + d)$ چقدر است؟

نکته: اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه حاصل ضرب و حاصل جمع (تفاضل) آن دو عدد نیز نسبت به هم اولند، یعنی: $(a, b) = 1 \Rightarrow (a \pm b, ab) = 1$

نکته: هر دو عدد صحیح متولی نسبت به هم اولند و نیز هر دو عدد صحیح فرد متولی نسبت به هم اولند.

$$\left. \begin{array}{l} (a,b)=1 \\ (a,c)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a,bc)=1$$

(لم اقلیدس): اگر $a|bc$ و $a|b$ ، آن‌گاه $a|c$.

نکته: اگر p عددی اول باشد و $p|ab$ آن‌گاه $p|a$ و $p|b$.

مثال ۳۳: اگر $(b,d)=1$ و $(a-2b, 3a-b)=d$ ، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

نکته: اگر $d=(a,b)$ ، آن‌گاه روابط زیر برقرارند.

$$1) (ka, kb) = |k|d \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$2) \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right) = \frac{d}{|k|} \quad k \neq 0$$

$$3) (a^n, b^n) = d^n \quad n \in \mathbb{N}$$

قضیه‌ی بزو: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، برابر

$$S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

مثال ۳۴: عضو ابتدای مجموعه‌ی $\{42r + 12s \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$ را بیابید.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

برای به دست آوردن کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان بیشتر و همچنین عامل‌های غیر مشترک را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

مثال ۳۵: کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 45° و 100° را بیابید.

$$\left. \begin{array}{l} a = a'd, \quad b = b'd, \quad (a', b') = 1 \\ [a, b] = a'b'd \end{array} \right\} \text{نکته: اگر } d = (a, b), \text{ آن‌گاه می‌توان نوشت:}$$

نکته: اگر a و b دو عدد صحیح دلخواه باشند، آن‌گاه $(a, b)[a, b] = |ab|$.

مثال ۳۶: کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی 13 برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد می‌باشد، اگر مجموع این دو عدد برابر 126 باشد، آن‌گاه $b \cdot m$ از دو عدد را بیابید.

مثال ۳۷: مجموع دو عدد طبیعی، برابر 45° و $b \cdot m$ آن دو عدد برابر 36 است. کمترین مقدار طبیعی برای تفاضل آن دو عدد را بیابید.

همنهشتی

اگر دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ($m \geq 2$) باقی‌مانده‌ی یکسانی مانند r داشته باشند،

آن‌گاه دو عدد a و b را همنهشت با یکدیگر به پیمانه‌ی m می‌گوییم و آن را به صورت $a \equiv b \pmod{m}$ (پیمانه $a \equiv b \pmod{m}$ نشان می‌دهیم).

نکته: اگر $a \equiv b^m$ آن‌گاه عدد صحیحی مثل q وجود دارد به طوری که: $a - b = mq$.

خواص همنهشتی:

در تمام روابط زیر اعداد صحیح و m عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد.

$$1) a \equiv a^m$$

$$2) a \equiv b^m \Rightarrow b \equiv a^m$$

$$3) (a \equiv b^m, b \equiv c^m) \Rightarrow a \equiv c^m$$

$$4) (a \equiv b^m, c \equiv d^m) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d^m$$

$$5) (a \equiv b^m, c \equiv d^m) \Rightarrow ac \equiv bd^m$$

$$6) (a \equiv b^m) \Rightarrow (a \pm c \equiv b \pm c^m, ac \equiv bc^m)$$

$$7) a \equiv b^m \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

$$8) (a \equiv b^m, a \equiv b^n) \Leftrightarrow a \equiv b^{[m,n]}$$

$$9) (a \equiv b^m, n | m) \Rightarrow a \equiv b^n$$

$$10) (ac \equiv bc^m, d = (m, c)) \Rightarrow a \equiv b^{\frac{m}{d}}$$

مثال ۴۸: باقی‌مانده‌ی تقسیم 35^4 بر ۹ را بیابید.

مثال ۴۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم $5^{316} + 5$ بر عدد ۷ را بیابید.

مثال ۵۰: باقی‌مانده‌ی تقسیم $5^{42} \times 18^n + 23 \times 5^n$ بر ۱۳ را بیابید.

مثال ۵۱: عدد 2^{1384} در تقسیم بر ۱۳ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

مثال ۵۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 2^6 بر ۱۷ را بیابید.

مثال ۵۳: کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن، $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

مثال ۵۴: اگر $a \equiv 2^6$ و $a \equiv 4^6$ ، آن‌گاه a در تقسیم بر ۲۴ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

مثال ۵۵: کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که با ازای آن رابطه‌ی $4x^3 \equiv 1$ برقرار باشد.

کلاس همارزی (دسته‌ی همارزی): کلاس همارزی a مجموعه‌ای از اعداد صحیح است که هر یک از آن‌ها به

$$[a]_m = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x \equiv a^m \right\}$$

پیمانه‌ی m با a همنهشت باشند.

مثال ۵۶: عدد 207 به کدام دسته‌ی همارزی به پیمانه‌ی ۸ قرار دارد؟

$$1) [1] \quad 2) [2] \quad 3) [3] \quad 4) [4]$$

مثال ۵۷: کدام دو عدد زیر متعلق به یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۷ هستند؟

$$1) 96 \text{ و } 27 \quad 2) 96 \text{ و } 28 \quad 3) 96 \text{ و } 26 \quad 4) 96 \text{ و } 25$$

مثال ۵۸: اگر $-1 - 2a$ عضوی از دسته‌ی همنهشتی $-3a - 3$ به پیمانه‌ی ۶ باشد، آن‌گاه a کدام می‌تواند باشد؟

$$1) 1381 \quad 2) 1382 \quad 3) 1383 \quad 4) 1384$$

قضیه‌ی فرما: اگر p عددی اول بوده و عدد صحیح a چنان باشد که $a \equiv 1 \pmod{p}$. آن‌گاه: $a^p \equiv 1 \pmod{p}$.

نکته: برای محاسبه‌ی رقم یکان اعداد توان دار، به جای پایه، رقم یکان و به جای توان، اگر توان مضرب ۴ باشد، به جای توان عدد ۴ و در غیر این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۴ را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴۹: رقم یکان عدد 1392^{1393} را بیابید.

مثال ۵۰: رقم یکان عدد 1383^{1384} را بیابید.

مثال ۵۱: رقم یکان عدد $43^{43} + 27^{27}$ را بیابید.

مثال ۵۲: رقم یکان عدد $49! + 73! + 82!$ را بیابید.

نمایش اعداد در مبنای‌های مختلف

می‌دانیم عدد ۴۹۲ که در مبنای ۱۰ نوشته شده است، به صورت $2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$ نیز قابل نمایش است و نیز عدد 5726_8 که در مبنای هشت نوشته شده است، به صورت $5 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0$ نیز قابل نمایش است. بنابراین هر عددی در یک مبنای خاص، قابل تبدیل به مبنای دیگر می‌باشد.

نکته: برای تبدیل هر عددی از مبنای ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰، از تقسیم‌های متواالی و برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰ از ضب‌های متواالی استفاده می‌کنیم.

نکته: برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ می‌توان ابتدا آن را به مبنای ۱۰ برد و سپس به مبنای غیر ۱۰ خواسته شده تبدیل کرد.

نکته: اگر یک عدد در مبنای n نوشته شود، حتماً هر یک از ارقام آن کمتر از n خواهد بود.

مثال ۵۳: عدد 2103_4 را به مبنای ۱۰ ببرید.

مثال ۵۴: عدد 357_8 را که در مبنای ۸ نوشته شده است به مبنای ۲ ببرید.

مثال ۵۵: عدد 1102_3 را به عددی در مبنای ۴ ببرید.

مثال ۵۶: عدد $4 + 2 \times 8^3 + 3 \times 8^4$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال ۵۷: عدد $11 + 13 \times 8^3 + 69 \times 8^4$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال ۵۸: عدد 1110_{11} را به مبنای ۸ ببرید. (چون $2^3 = 8$ لذا اعداد را از سمت راست، ۳ تا ۳ تا جدا کرده و هر کدام از این اعداد سه تایی را به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم و برای تبدیل از مبنای ۸ به ۲ برعکس عمل می‌کنیم، یعنی هر عدد از مبنای ۸، ۳ رقم از آن عدد را در مبنای ۲ تشکیل می‌دهد)

مثال ۵۹: حاصل عدد 3754_8 را در مبنای ۲ بنویسید.

مثال ۶۰: اگر $x_{x+1} = 134$ ، در این صورت x را بیابید.

مثال ۶۱: اگر عدد دو رقمی \overline{ab}_9 با عدد \overline{ba}_9 برابر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

مثال ۶۲: عدد $65!$ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

قوانين یافتن بخش‌پذیری اعداد طبیعی بر اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ...:

- ۱) بخش‌پذیری بر 2^k (۲ و ۴ و ۸ و ...): عددی بر 2^k بخش‌پذیر است که مجموع k رقم سمت راست آن بر 2^k بخش‌پذیر باشد.
- ۲) بخش‌پذیری بر ۹: عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع تمام ارقامش بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.
- ۳) بخش‌پذیری بر ۵: عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.
- ۴) بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر ارقام آن را به ترتیب از راست به چپ با علامت مثبت و منفی جمع جبری کنیم حاصل آن بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

معادله سیاله

هر معادله به صورت $ax + by = c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و برای هر x و y , به دنبال مقادیری در \mathbb{Z} باشیم، یک معادله سیاله خطی دو مجهولی نامیده می‌شود.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $c | (a, b)$.

مثال ۶۳: اگر معادله $5n + 11 = 84x + 66y$ در مجموعه اعداد صحیح جواب داشته باشد، آن‌گاه n چه مقادیری را می‌تواند اختیار کند؟

نکته: اگر $(a, b) = 1$, آن‌گاه معادله $ax + by = c$ همواره جواب دارد.

نکته: اگر x و y جواب‌هایی از معادله $ax + by = c$ باشند، آن‌گاه جواب‌های کلی آن معادله به

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad \text{شکل زیر است.}$$

مثال ۶۴: جواب‌های عمومی معادله $-4x + 5y = -9x + 5$ را بیابید.

مثال ۶۵: اگر x و y جواب‌هایی از معادله $54x + 21y = 15$ باشند، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد x بر ۷ را بیابید.

مثال ۶۶: معادله سیاله $4x + 38y = 20$ را در \mathbb{Z} حل کنید.

مثال ۶۷: پستخانه‌ای فقط تمپرهای ۲۱۰ ریالی و ۱۴۰ ریالی برای فروش دارد. بسته‌ای نیاز به ۱۴۷۰ ریال تمپر دارد. چند تمپر ۲۱۰ ریالی و چند تمپر ۱۴۰ ریالی باید بخرد.