

حل المسائل ریاضی و آمار دوازدهم
رشته علوم انسانی و معارف

کانال گام به گام درسی :

@GamBeGam-Darsi

با تشکر از گروه ریاضی دوره دوم
متوسطه استان خوزستان برای تهیه و
تنظیم این فایل

توجه : کانال گام به گام درسی در سایر
پیام رسان ها هیچ گونه فعالیتی ندارد

فصل ۱ - آمار و احتمال

درس ۱ شمارش

درس ۲ احتمال

درس ۳ چرخه آمار در حل مسائل

«... و احاطه بدان‌کتاب و احصای کل شمره عتدأ» (آیه ۲۸ / سوره مبارکه جن)
«... و او (خدایتد) به آنچه ترد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده است»



درس ۱

شماره ۱

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۲۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $۲۵ + ۳۰ = ۵۵$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی برستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می‌تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسد: $۲ + ۳ = ۵$

نماینده بنویسد: (پیاده‌روی، تاکسی، اتوبوس، مترو، ...). $A = \{ \text{پیاده‌روی} \}$

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

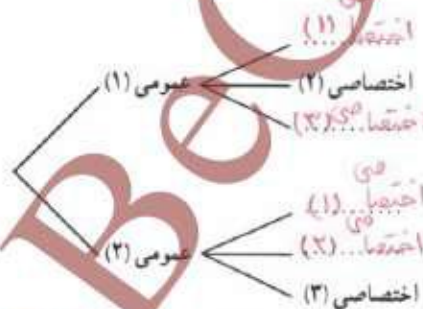
مثلاً شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار یا چهار رنگ مختلف و پنج مداد یا رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟
 حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیاء می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} = 5 + 4 + 3 = 12$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی $3 \times 2 = 6$ راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $2 \times 6 = 12$ طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

سوال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام داران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته بندی می کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می گیرند. اعضای گروه A باید درباره تنایم مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره تنایم مساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

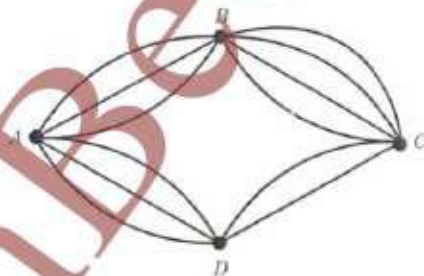
راه حل:

الف) از اصل جمع استفاده می کنیم؛ زیرا مدیرعامل می تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ازای هر انتخاب از A، به ۸ طریق می تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه رو، میان چهار شهر A، B، C و D راه های وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می توان:
 الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B به راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ «یا» $A \rightarrow D \rightarrow C$ را انتخاب کرد (اصل جمع)؛ بنابراین:
 تعداد راه های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه های سفر از A به C به

$$= 3 \times 4 + 3 \times 4 = 12 + 12 = 24$$

ب) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ «یا» $B \rightarrow A \rightarrow D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم:
 تعداد راه های مسافرت از B به D = $4 \times 3 + 3 \times 3 = 12 + 9 = 21$

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد، مانند n ، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $n \times n = n^2$ ، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم. برای مثال، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $1! = 1$ و $0! = 1$ تعریف می‌کنیم.
مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^3}{\underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_3} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{6 \times 120 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c, d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم».

فعالیت

۱- اگر افراد A, B, C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\frac{3}{A \text{ یا } B \text{ یا } C} \quad \frac{2}{\text{یکی از ۲ نفر باقی مانده}} \quad \frac{1}{\text{نفر باقی مانده}} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

(اول شخص B ، بعد C و آخر ۱ سخنرانی کرده‌اند)

۲- با ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\frac{5}{\text{تعداد انتخاب‌ها}} \rightarrow \frac{5}{5} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1} \rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

۲- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.
 حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $n-1$ انتخاب داریم و... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با،
 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

$$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots \times \frac{2}{n-2} \times \frac{1}{n-1}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام $0, 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

اصل ضرب $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
 تعداد انتخاب‌ها $\frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 120$

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنابرین:

اصل ضرب $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$
 تعداد انتخاب‌ها $\frac{4}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 96$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

$$120 - 96 = 24$$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر

حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

اصل ضرب $5! = 120$
 تعداد انتخاب‌ها $\frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 120$

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

اصل ضرب $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$
 تعداد انتخاب‌ها $\frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = 48$

$$120 + 48 = 168 = \text{تعداد ۵ رقمی‌های زوج}$$

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی هایی که به ۵ ختم می شوند + ۵ رقمی هایی که به صفر ختم می شوند = تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵

تعداد انتخاب ها → اصل ضرب $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{5}{1}$ → $5! = 120$

تعداد انتخاب ها → اصل ضرب $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{5}{1}$ → $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵ = $120 + 24 = 144$

تبدیل (انتخاب ۳ شیء از بین ۷ شیء، که در آن جابه جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد).

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.)

تعداد انتخاب ها → اصل ضرب $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{4}$ → $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

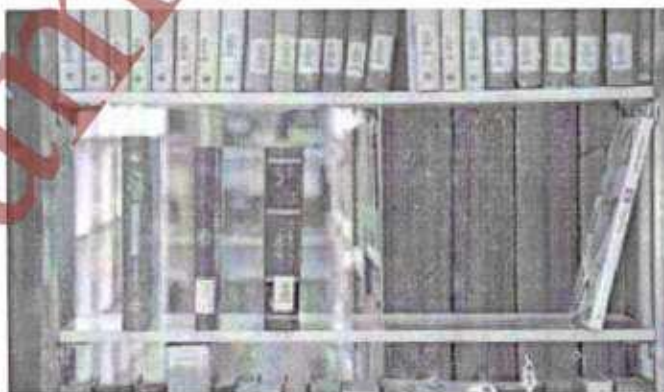
از طرفی: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$

(توجه دارید که یا جابه جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت ها، جابه جایی ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

تعداد انتخاب ها → اصل ضرب $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{3}$ → $5 \times 4 \times 3 = 60$

از طرفی: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$



در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow \frac{n}{n} \frac{n-1}{n-1} \frac{n-2}{n-2} \dots \frac{(n-r+2)}{(n-r+2)} \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)}$

طبق اصل ضرب $\rightarrow n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(n-r+1)$

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \times (\dots)}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

* تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۱۰ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

روش دوم: $\frac{10}{10} \frac{9}{9} \frac{8}{8} \dots \frac{8}{8} \frac{7}{7} \frac{6}{6} \frac{5}{5} \dots \frac{5}{5} \frac{4}{4} \frac{3}{3} \dots \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1} \dots \frac{1}{1} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

* ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد). برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۲ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر ۳! تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۳	۱,۲,۴	۱,۳,۴	۲,۳,۴
جابگشت های سه رقم انتخاب شده	۱۲۳ ۱۳۲ ۲۳۱ ۲۱۳ ۳۱۲ ۳۲۱	۱۲۴ ۱۴۲ ۲۱۴ ۲۴۱ ۴۱۲ ۴۲۱	۱۳۴ ۱۴۳ ۳۱۴ ۳۴۱ ۴۱۳ ۴۳۱	۲۳۴ ۲۴۳ ۳۲۴ ۳۴۲ ۴۲۳ ۴۳۲
	$A_1 = \{1,2,3\}$	$A_2 = \{1,2,4\}$	$A_3 = \{1,3,4\}$	$A_4 = \{2,3,4\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

* ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟
حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

روش دوم: $P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$

۱۱. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟
در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6! \times 3!} = 84$$

۱۲. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

۱۳. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟
در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

تمرین

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس نهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟
 $12 + 11 + 10 = 33$

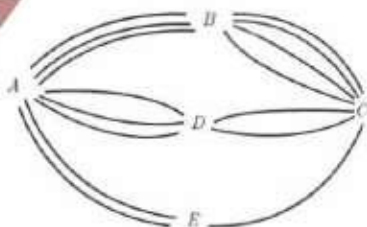
۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ $(3 \times 2) + (2 \times 1) = 20$

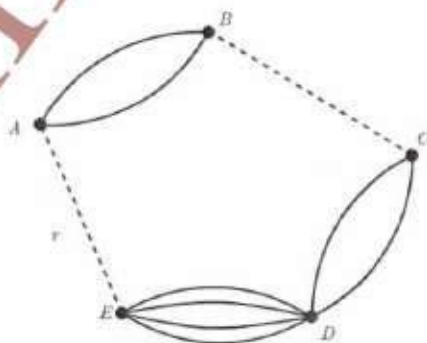
ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟ $(3 \times 2) + (1 \times 2) = 10$

$$3 + (2 \times 2 \times 3) = 27$$



۳. الفبای کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)
 الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟
 ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟
 پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟
۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟
۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهای در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟
۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و زوج تر از 80000 می توان نوشت؟ ب) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟ ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟
۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:
 الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.
 ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.
 ج) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.
 ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.
۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.
۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر E به A را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



حل تمرینهای صفحه ۱۱

تمرین ۳:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب) $4 \times 3 \times 1 = 12$

پ) $1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

تمرین ۴:

$$P(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

تمرین ۵:

$$7 \times 2 \times 2 = 28$$

تمرین ۶:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ب) $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

پ) $\binom{6}{3} = 20$

ت) $\binom{10}{5} \times \binom{6}{1} = 252 \times 6 = 1512$

کافی است تعداد زیر مجموع های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 6, 9\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

تمرین ۷:

الف) $\binom{12}{2} = 66$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

تمرین ۸:

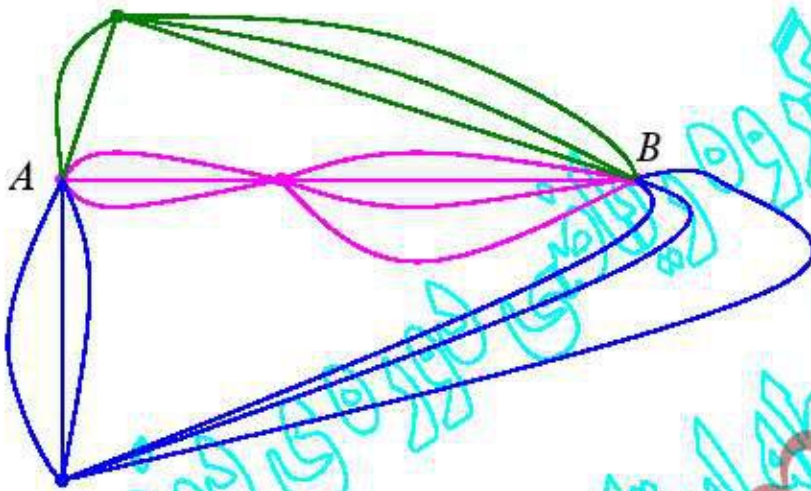
الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{2} = 10 \times 15 = 150$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

ب) $\binom{5}{2} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = (10 \times 15) + (5 \times 6) + (1 \times 1) = 150 + 30 + 1 = 181$

$$c) \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 10 \times 15 = 150$$

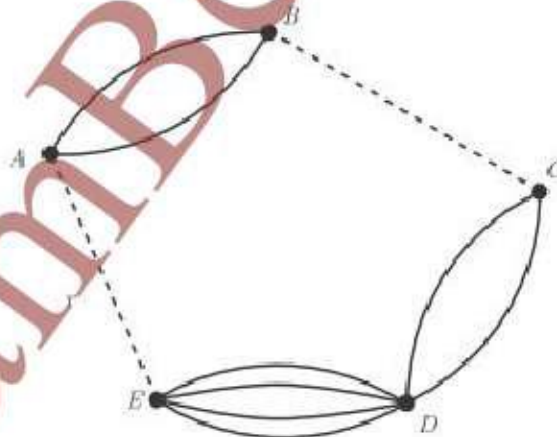
تمرین ۹: به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.



تمرین ۱۰: به نظر می رسد که صورت مسئله اشتباه تایی دارد حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم می توان

به شکل زیر عمل کرد.

۱۰. تعداد راهها یا جادهها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از E به A را برابر n قرار دهیم خواهیم داشت.

$$2 \times m \times 2 + n \times 4 = 20 \rightarrow 4m + 4n = 20 \xrightarrow{\div 4} m + n = 5$$

لذا می توان نوشت :

m	۱	۲	۳	۴
n	۴	۳	۲	۱

فعالیت

ترگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز ترگس مانند هر روز ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟ هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، ترگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟ عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک، از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... بنابراین؛ دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه ترگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه ترگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.



پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به‌طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به‌طور قطعی مشخص نیست. این گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعا رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

ج) نتیجه قره کشی

الف) نتیجه برتاب سکه
ب) نتیجه برتاب تاس

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشند، آزمایش های یا پدیده های قطعی می گوئیم.
برای مثال، چنانچه سنگی را به داخل استخرهای برتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می دانیم که سنگ به داخل آب فرو می رود یا پیش از برتاب یک سکه می دانیم که سکه روی زمین می نشیند. این گونه پدیده ها، آزمایش هایی قطعی هستند.

ب) نتیجه استخراج مهره از درون کيسه قره کشی مهره ها خارج نگردانند.

الف) نتیجه رها شدن سیب از درخت

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛ **قطعی**

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، برتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ **تصادفی**

ج) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ **قطعی**

د) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛ **تصادفی**

ه) در یک بازی بین دو نفره سکه ای برتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج

بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟ **تصادفی**

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضو { خودکار، مداد } می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟ **خیر**

ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره گذاری متمایز می کنیم.

{ خودکار ۱، خودکار ۲، خودکار ۳، خودکار ۴، خودکار ۵، مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳ }



فضای نمونه

در برتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت، مجموعه همه برآمدهای سگی در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.



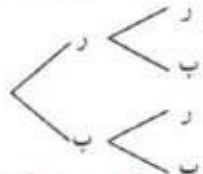
بنابراین، در برتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۱. برتاب دو سکه باهم.

برتاب سکه اول برتاب سکه دوم



$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

۲. برتاب سه سکه با هم (برتاب یک سکه سه بار)

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

۳. برتاب یک تاس و یک سکه باهم.

$$S = \{(۱, ر), (۱, پ), (۲, ر), (۲, پ), (۳, ر), (۳, پ), (۴, ر), (۴, پ), (۵, ر), (۵, پ), (۶, ر), (۶, پ)\}$$

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه برتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل

حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

		(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
		(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
		(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
		(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
		(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
		(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$S = \{(۴۳۲), (۴۳۱), (۴۲۳), (۴۲۱), (۳۴۲), (۳۴۱), (۳۲۴), (۳۲۱), (۲۴۳), (۲۴۱), (۲۳۴), (۲۳۱), (۱۴۳), (۱۴۲), (۱۳۴), (۱۳۲), (۱۲۴), (۱۲۳)\}$$

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = 165$$

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$ ؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است: $\emptyset \subseteq A$ یعنی $\emptyset \subseteq A$

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در برتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

$$\text{الف) } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{ب) } A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

این مثال باید بعد از ترمز پیشامد بیان شود.

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ پس \emptyset یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشدنی) همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک بار برتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{b, r\}$ ، S تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

$$\{r\}, \{b\}, \{r, b\}, \{\emptyset\}$$

۲. مریم، ملیکا و سوگند بول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

$$S = \{\text{سوگند و ملیکا}, \text{سوگند و مریم}, \text{سوگند و مریم و ملیکا}, \emptyset\}$$

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصهٔ آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

$$S = \{\text{سوگند و ملیکا}, \text{سوگند و مریم}, \text{سوگند و مریم و ملیکا}, \emptyset\}$$

۳. تاسی را برتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{3, 2, 5\}$$

الف)

$$B = \{1\}$$

ب)

۱۵

$$\{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{سوگند و مریم و ملیکا}\}, \{\text{سوگند}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{سوگند و مریم و ملیکا}\}, \{\emptyset\}$$

هفته پیشامدها، کما، یک برآمد ۲ باره

$C = \{2, 4, 6\}$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

مثلاً پیشامد $E = \{3, 4, 6\}$ رخ نداده است. زیرا $2 \notin E$

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

$\{\}$

۲۴ اعضای S

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$

۵. در یک برنامه کهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

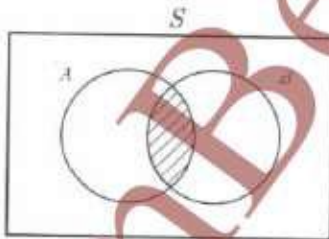
دوازدهم یازدهم دهم

$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$

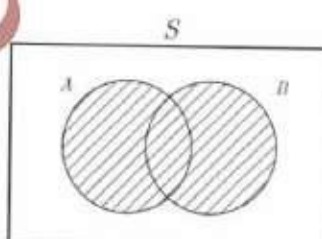
ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.
 $n(B) = \binom{6}{2} \binom{9}{1} + \binom{6}{3} \binom{9}{0} = 15 \times 9 + 20 \times 1 = 135 + 20 = 155$

اعمال روی پیشامدها

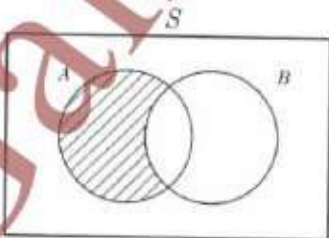
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به صورت زیر یادآوری می کنیم.



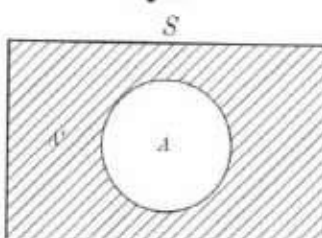
$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$
(شکل ۱)



$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$
(شکل ۲)



$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
(شکل ۳)



$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$
(شکل ۴)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند:

الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید: طوری که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

ب) پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید: طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

پیشامد مورد نظر برابر با $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1)\}$$

ب) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

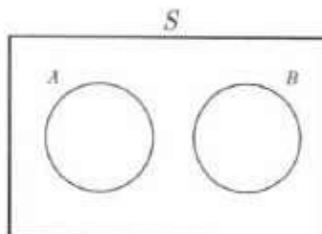
ت) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم:

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال: هرگاه A و B دو پیشامد تانهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

حل: چون $A - B = A$ و $B - A = B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای تانهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای A و B را

ناسازگار می‌گوییم.

برای مثال، در برناب یک ناس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

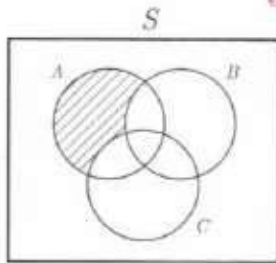
$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{2, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

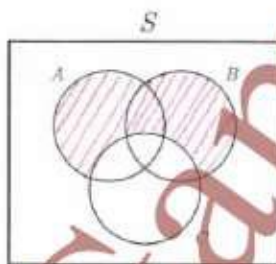
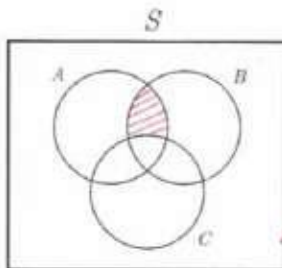
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{4, 6\}$$

$$B - A = \{3, 5\}$$



$A - (B \cup C)$



۱. ناسی را برناب می‌کنید؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

$$B' = S - B = \{1, 4, 6\}$$

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای

زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارات مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را

مانند نمونه بنویسید.

– فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهند.

– پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

– پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

$$S = \{(د د د), (د د پ), (د پ د), (د پ پ), (پ د د), (پ د پ), (پ پ د), (پ پ پ)\}$$

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$A = \{(د د د), (پ پ پ)\}$$

$$B = \{(د پ پ), (پ د پ), (پ پ د)\}$$

$$C = \{(> > >), (> > <), (> < >), (< > >)\}$$

چون پشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.
با توجه به پشامدهای A و B و C به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. آیا پشامدهای A و B ناسازگارند؟ **بله**
 ۲. آیا پشامدهای C و B ناسازگارند؟ **بله**
 ۳. آیا پشامدهای C و A ناسازگارند؟ **خیر**

۴. دو پشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید. در برابر یک ناس پشامدها آمدن عدد فرد و آمدن عدد زوج ناسازگارند.

احتمال یک پشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه منتهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر n برآمد برای وقوع دانسته باشد و A پشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان که پشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
۲. در حالتی که پشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1 \Rightarrow P(S) = 1$
۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

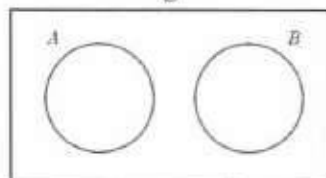
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو پشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با برگردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم برتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛ بنابراین $n(S) = 12$.

$$S = \{(1, ر), (2, ر), \dots, (6, ر), (1, پ), (2, پ), \dots, (6, پ)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با:

$$A = \{(2, ر), (4, ر), (6, ر), (2, پ), (4, پ), (6, پ)\}; n(A) = 6$$

بنابراین، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(1, پ), (2, پ), (3, پ), (4, پ), (5, پ), (6, پ)\} \rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

$$C = \{(1, ر), (2, ر), (3, ر), (4, ر), (5, ر), (6, ر), (1, پ), (2, پ), (3, پ), (4, پ), (5, پ), (6, پ)\}$$

ب) تاس زوج یا سکه رو بیاید.



$$D = \{(1, پ), (3, پ), (5, پ)\} \rightarrow P(D) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت بر می‌شوند.

$$n(s) = 12^5 \rightarrow \frac{12}{\text{فروردین}} \frac{12}{\text{فروردین}} \frac{12}{\text{فروردین}} \frac{12}{\text{فروردین}} \frac{12}{\text{فروردین}}$$

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A، به طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

$$n(A) = 1 \rightarrow \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \rightarrow \text{تعداد انتخاب ها}$$

در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

$$P(B) = \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \dots + \frac{1}{12^5} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

ب) تولد هیچ دو نای آنها در یک ماه نباشد.

$$P(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{5}{12^4}$$

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخص یکی از شماره های ۰۲، ۰۳، ۰۴، ... و ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با برتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می شود.

$$n(S) = 36$$

الف) احتمال برنده شدن چه شماره ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

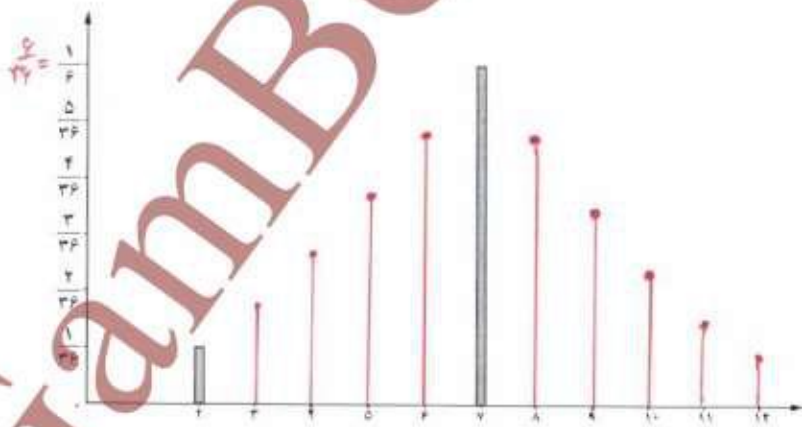
ب) احتمال برنده شدن کدام شماره ها از همه کمتر است؟

$$B = \{(1,1)\} \quad C = \{(6,6)\}$$

$$n(A) = 6$$

ب) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ن) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



برآیند مجموع ۵

$$E = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$P(E) = \frac{4}{36}$$

نتیجه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	جمع
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۳۶
احتمال	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	۱

فعالیت

- در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال این را بیاید که شیء انتخابی مداد باشد: $P(A)$

ب) احتمال این را بیاید که شیء انتخابی خودکار باشد: $P(B)$

پ) احتمال این را بیاید که شیء انتخاب شده مداد نباشد: $P(A')$

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

مداد بیارد = خودکار نبارد
 $\frac{3}{8}$
 $\frac{5}{8}$
 $P(B) = P(A')$



$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A' و A دو پیشامد متعمم می‌گوئیم.

کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{6}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد. $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

۲. احتمال اینکه کپارش فردا به مدرسه نرود برابر با $\frac{1}{100}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کپارش به مدرسه برود. $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

۳. احتمال اینکه ریحانه اسب سربال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه اسب سربال را تماشا کند. $1 - \frac{32}{49} = \frac{17}{49}$

مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی بیراهن ورزشی شامل ۴ بیراهن قرمز، ۴ بیراهن آبی و ۲ بیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که هر دو تنه به طور تصادفی ۳ بیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ بیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ بیراهن متفاوت باشند، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ بیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ بیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ بیراهن آبی نباشند، محاسبه کنید.

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: الف) چون قرار است ۳ بیراهن از بین ۱۰ بیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

چنانچه هر سه بیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند. بنابراین، اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناسازگارند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) برای اینکه رنگ سه بیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک بیراهن قرمز، یک بیراهن آبی و یک بیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 \quad ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

ب) برای اینکه حداقل ۲ بیراهن فرمز باشند، آن گاه ۲ بیراهن فرمز یا ۳ بیراهن فرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو بیراهن آبی باشند، باید دو بیراهن آبی یا یک بیراهن آبی و یا صفر بیراهن آبی داشته باشیم:

$$n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ بیراهن آبی باشد، آن گاه $P(F^c) = 1 - P(F)$ احتمال این است که ۳ بیراهن آبی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان است. یعنی می‌توان راه حل قسمت «ت» را برای قسمت «ث» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ بیراهن به دنبال تعداد بیراهن‌های آبی باشیم، پشامدهای ممکن روی فضای نمونه به صورت زیر است.



$$P(A \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = P(S) = 1$$

تمرین

۱. کدام یک از بدیده‌های زیر لزوماً تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
 الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود. **تصادفی**
 ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی**
 پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم. **تصادفی**
 ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.
 - عددی را انتخاب می‌کند.
 - سه واحد به آن عدد می‌افزاید.
 - سپس حاصل را دو برابر می‌کند.
 - از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.
 - نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.
 - از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.
 - در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده، پاسخ را اعلام می‌کند.

بسیار ساده است

قطعی

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گانه‌تاس را می‌زنیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.
 الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

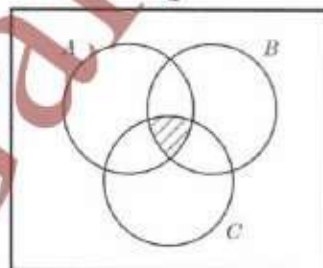
ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

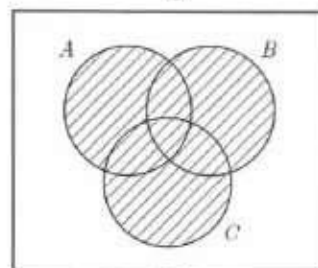
الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

د. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲، ۳، ۴، ۱ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد، ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد،
 ۶. خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند، ب) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.
 ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ت) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.
 ۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

ب) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد، ت) ایا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

ب) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستند و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

ب) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.



۱۰. ۷ برجم مختلف را به هفت میله برجم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. محتاجه این برجم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله برجم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

۱۱. داده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۲ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک بازی جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رها می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

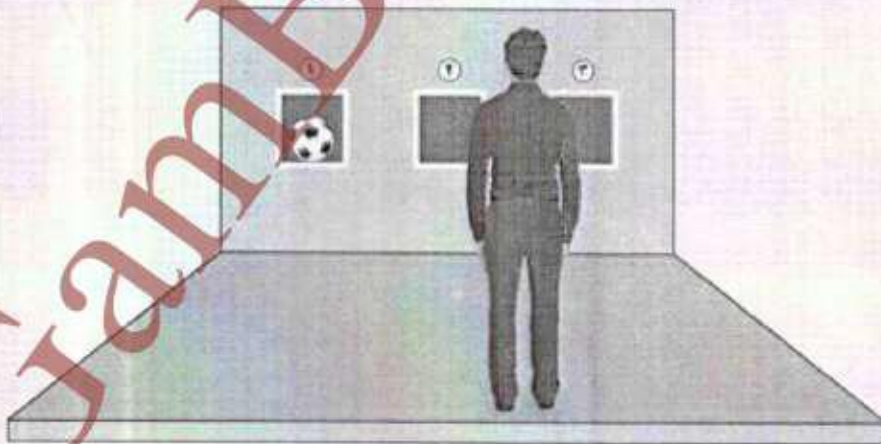
الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

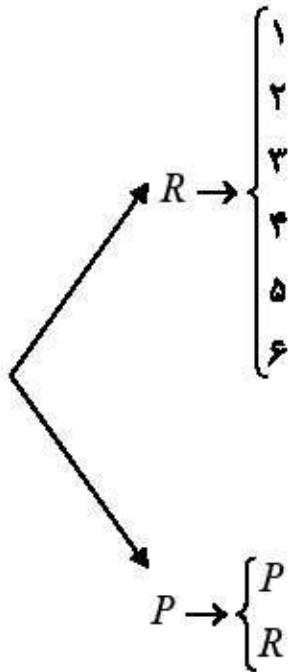
در یک مسابقه، سه درجه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک درجه به طور تصادفی باز می‌شود و تویی از آن به طرف شرکت‌کننده برتاب می‌شود. اگر این فرد نتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می‌شود.

به نظر شما، احتمال برتاب توپ از هر درجه چقدر است؟ اگر یک درجه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شماره درجه غیرفعال را بداند، در این صورت احتمال برتاب توپ از هر درجه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟



حل تمرینهای صفحه‌ی ۲۵

تمرین ۲:



(الف)

$$S = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, P), (P, R)\}$$

(ب)

$$A = \{(R, 2), (R, 3), (R, 6), (P, P), (P, R)\}$$

تمرین ۳:

(الف)

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

(ب)

$$A = \{3, 9, 15\}$$

(پ)

$$B = \{1, 9\}$$

(ت)

$$A \cap B = \{9\} \text{ و } A - B = \{3, 15\}$$

تمرین ۴:

الف: هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

ب: حداقل یکی از سه پیشامد C یا B یا A رخ دهند.

تمرین ۵:

(الف)

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

(ب)

$$A = \{12, 24, 42\}$$

(پ)

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

تمرین ۶:

(الف)

$$S = \{PPP, PPR, PRP, RPP, PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

(ب)

$$A = \{PPP, RRR\}$$

(پ)

$$B = \{PPR, PRP, RPP\}$$

(ت)

$$C = \{PPP, PPR, PRP, RPP\}$$

(ث)

$$D = \{PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

تمرین ۷:(الف) عضو $2^2 = 16$

$$(ب) A = \{PPRR, PRRR, RPPRR, RRRR\}$$

$$(پ) C = \{PRRR, RPPRR, RRRR, RRRR\}$$

(ت) خیر ناسازگار نیستند.

تمرین ۸:

$$(الف) P(A) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} = \frac{220 \times 1}{680} = \frac{11}{34} \quad (ب) P(B) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{33}{68}$$

$$(پ) P(C) = \frac{\binom{12}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} + \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{11}{34} + \frac{33}{68} = \frac{55}{68}$$

تمرین ۹:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

$$C = \{3, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(الف)

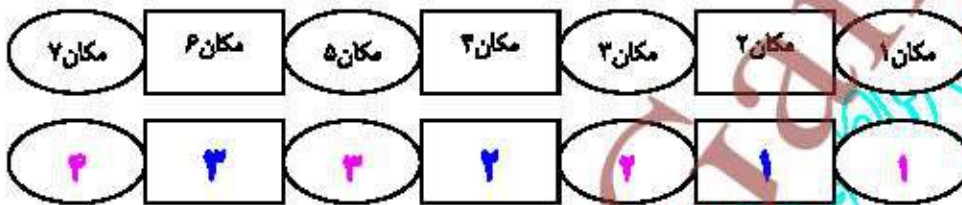
(ب)

(ج)

تمرین ۱۰:

۴ و ۶ و ۱ پرچم های غیر اول

۲ و ۳ و ۵ و ۷ پرچم های اول



تعداد حالت های مساعد $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4 \times 3! = 144$

تعداد کل حالت ها $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$

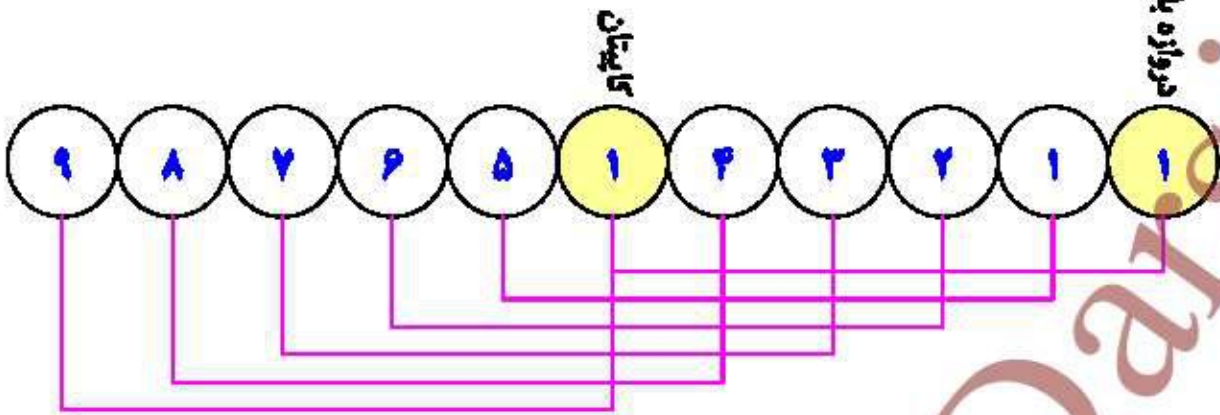
$$P(E) = \frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$$

موسسه استانی خوارزمستان

@Gamb

تمرین ۱۱:

دوازده بیان



تعداد حالت های مساعد = $9! \times 6 \times 2$

تعداد کل حالت ها = $11!$

$$P(E) = \frac{9! \times 6 \times 2}{11!} = \frac{9! \times 6 \times 2}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{6}{55}$$

تمرین ۱۲:

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{15}{5} + \binom{5}{1} \times \binom{15}{6} + \binom{5}{0} \times \binom{15}{7}}{\binom{20}{7}} =$$

تمرین ۱۳:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \times 5 + 10 \times 1}{120} = \frac{50 + 10}{120} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$



دنیای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آنها روبه‌رو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم. محدودیت‌های نتایج به دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی مان نمایانن پاسخی برای آن. از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

❓ دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند. بنابراین، برنامه‌ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به‌طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

📌 گروه اجراکننده این پروژه، پرسش‌نامه‌ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این پرسش‌نامه را تکمیل کنند:

- الف) به‌طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟
 ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهید، علامت بزنید.
- خواندن کتاب الکترونیک شبکه‌های اجتماعی عکاسی بازی تماس تلفنی
 تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان‌چارکی گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

حس می‌زند دانش‌آموزان کلاس شما به‌طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

• اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در پرسش اول مشخص نمی‌شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟
این یکت پاسخ‌ها گرفتن ستود. متوجه زیاد اکم و ...

■ داده‌ها پس از گردآوری در نرم‌افزار وارد شدند. اشتباه‌های ناپی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. پرسش‌نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود) کنار گذاشته شدند.

• ممکن است برخی دانش‌آموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی پرسش‌نامه چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم؟

■ نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام‌شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷ دقیقه و دامنه میان‌چارکی آن $Q_3 = 100$ و $Q_1 = 65$ دقیقه بود.



- با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به‌طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟ *۲۵ درصد*
- با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟
*فراوانی کم: بازی و عکاسی
 فراوانی بیشتر: شبکه‌های اجتماعی*
- چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

چون ممکن است روش آموزی چندگزینه‌ای را آنتی‌ب کرده بار

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن یا تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، داده‌های قبل از میانه را چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان‌چارکی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با (Interquartile Range) IQR نمایش می‌دهیم.



دوم، عَزِزْ دَهْم و دَوَلَر دَهْم

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش آموزان پایه‌های..... این مدرسه (نه دانش آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد جگونگی استفاده از تلفن‌ها (نه ابزارهای دیگر) صادق است.
 با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ **شبکه‌های اجتماعی**

از میانه دامنه میان چارگی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟
 ۵۰ درصد دانش آموزان بیش از ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند استفاده می‌کنند و ۵۰ درصد دیگر کمتر از ۷۰ دقیقه در روز

مشاوران آموزشی، به کمک دانش آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که (۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش آموزان را بهبود بخشد؛ (۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب، محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش آموزان قرار دهند و دانش آموزان در



ساعتی از شبانه‌روز که آماده‌گی بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها در میان بگذارند؛ (۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانش آموزان، می‌توان علاقه دانش آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانش آموزان در طول روز با تلفن‌هایشان کار می‌کنند، پرسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌های داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش آموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش آموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های: ۱- بیان مسئله، ۲- طرح و برنامه‌ریزی، ۳- گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴- تحلیل داده‌ها و ۵- بحث و نتیجه‌گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری می‌کنیم، به اصطلاح می‌گیریم نتایج را تعمیم داده‌ایم.

کار در کلاس

اکنون که چرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل‌شده در سطح سوه می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح‌رکب	در می‌برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بخش‌بندی	نتایج دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در فضای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴	کتابخانه داده‌ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری داده‌ها	داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

گام‌های چرخه امار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم». همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با رویش پرسش‌های مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازمی‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.



مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های بهلوانی و...) با توانایی‌ها و ناتوانی‌های

جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی‌توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

همین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میاب بصران ۱۳ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می‌تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود.

چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه آماری مورد بررسی تأثیر بگذارد؟ چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کند؟ گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (تعددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دمای اسان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه این قدر هم آسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه پرسش‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه‌گیری دارای‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد، وستان و... لزوماً مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این‌طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافقی درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.



تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم. هرچه بزرگ‌تری متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز است؟ توضیح دهید.

الف) □ اسانس دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید. *نمونه کوچک*
 □ معدل سال گذشته دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید. *نمونه بزرگ*

*حرحه براندگی منعی مورد بررسی
 به‌سختی با ریزه با به نمونه بزرگ
 آتشی با بشرد.*

ب) □ بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی *نمونه کوچک*
 □ بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی *نمونه بزرگ*

۲. علی و امید در یک پروژه دانش‌آموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ ابادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند.»

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند.»

امید پیشنهاد می‌کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانش‌آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ ابادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه‌نمونه کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش‌آموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و به‌صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیش‌پا
 علی*



ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیش‌پا
 امید*

پ) اگر مثلا به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آماره نمونه) بزرگ‌تر از میانگین آن در جامعه آماری (بازار متر

جامعه) می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلا به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند. *اشکال پیش‌پا
 علی*

دو اشکال دیگر را که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید. *عدم نمونه‌برداری از ساکنین
 در اماکن مختلف*

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه‌نمونه‌گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه‌ها
 ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه‌ها.



□ گام ۳ (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

کار در کلاس

جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک پروژه دانش‌آموزی پیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم‌افزارها نمی‌توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می‌کنیم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است.

در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است.

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش‌آموز
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱
۱۴	۰	۱	۲	۱۵	۲
۱۵	۲	۲	۱	۱۴	۳
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴
۱۷	۲	۲	۲	۵۱	۵
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۶
	۱۹	۷	۳	۱۵	۷
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۸
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۹
۱۰	-	۲	۱	۱۴	۱۰
۱۲	۱	۲	۱	۱۴	۱۱
۱۴	۲	۱	۲	۱۴	۱۲
۲۰	۷	۳	۱	۱۵	۱۳
۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۱۴

با توجه به جدول داده‌ها

الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه ناپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟
 دانش‌آموز ۵۱ ساله و پسر ۵ ساله

ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابجا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش‌آموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است.
 ردیف ۷ / کد ۳ بسکتبال / ۱۹

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟ ۲۲ ردیف ۴

ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؛ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟
 ۳۴ / ۵

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز یا واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟
 دانش‌آموز ردیف ۴ نمره ۲۰ + به پسر کدی

بحث و گفت‌وگو

- اگر دانش‌موزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمرای برای او در نظر بگیریم، این کار چگونه انجام دهیم؟ در این باره چه پیشنهادی دارید؟
ایا با بررسی تمامی موارد ممکن می‌توانیم مطمئن باشیم که داده‌ها کاملا درست ثبت شده‌اند؟ چرا؟

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.
یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

میانگین و انحراف معیار را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

کار در کلاس

با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده‌ها	معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی	
		میانگین	میان	IQR	SD (s)
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶٫۸۳	۱۷	۲٫۵	۱٫۴۱
میزان تماشای تلویزیون	۴ ۲۱ ۴ ۶ ۷ ۶/۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹٫۷۱	۶٫۲۵	۳	۸٫۹۴

راهنمای جدول: میزان تماشای تلویزیون: متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون در هفته؛ IQR: دامنه میان جاری؛ SD: انحراف معیار.

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.
 $Q_3 = 19$, $Q_2 = 17$, $Q_1 = 15,5$, $min = 15$, $max = 19$
 $Q_3 = 30$, $Q_2 = 9,25$, $Q_1 = 4,5$, $min = 4$, $max = 30$

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

میانگین / انحراف معیار زیرا داده دورافتاده وجود ندارد.

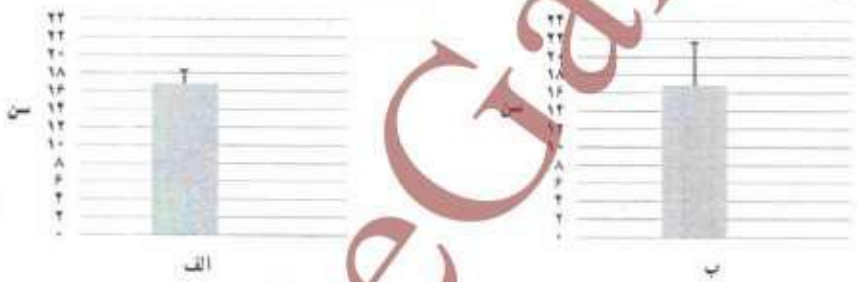
* IQR: Interquartile Range

** SD: Standard Deviation

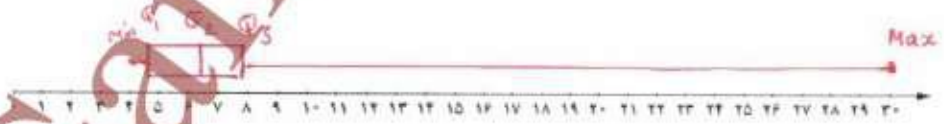
الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟
 میانه / دامنه / میانگین / چارگی
 ب) انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟
 ۲۹ و ۳۰ توان داد از میانگین زیاد می‌شود.
 ت) اگر برای توصیف داده‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خوانندگانی که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می‌شدند؟
 میانگین غیر واقعی در اختیار دارند. واقعیت کمتر از آنچه دوست می‌آید.
 بهتر است میانه محاسبه گردد.

در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطی آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ن) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدام یک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟
 نمودار الف یا ب؟



اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟
 جعبه‌ای

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟
 جعبه‌ای زیرا اگر داده‌ی دور افتاده نباشد، قدری متقارن می‌شود و میانگین و میانه به هم نزدیک می‌شوند.

کار در کلاس

دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً ۱۰۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»
مریم می‌گوید: «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟»
انها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

	حقوق کارمندان									
شرکت اول	۱	۱.۵	۱.۲	۱.۷	۱.۴	۱.۹	۳	۱.۱	۱.۸	
شرکت دوم	۰.۷	۱	۸	۱۲.۱	۰.۸	۱.۶	۸.۱	۰.۹	۰.۸	

Min = ۰.۷
Q₁ = ۰.۸
Q₂ = ۱
Q₃ = ۱.۵
Max = ۱.۸

Min = ۱
Q₁ = ۱.۱
Q₂ = ۱.۵
Q₃ = ۱.۸
Max = ۳

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است. *درست*
- اگر نرگس سطوح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. *درست*
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است. *نادرست*

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟ *حوزه ندادند و پیش‌آموز قبولی*

ب) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید. *شده مشخص نیست، بود اولیا انتخاب مدرسه ۱۰۰٪ افزایش*

در مورد ۱۰۰٪ افزایش ۲۰۰ برابر بوده و ۲۰٪ افزایش ۱/۵ بوده

۱) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟
 (ت) در گزارش متغیرهای کیفی، آرا به درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه کننده باشد؟
 (ب) نظر ما آید در صورتی که ...
 (پس ۱ به ۲ ها توان ۱۰۰ درصدی شود)

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش در صد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام ۳: بحث و نتیجه‌گیری

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه‌گیری، داده‌ها را با روش‌های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (\text{از جامعه‌ای با اندازه } N \text{ به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه } n \text{ داشته باشیم؟})$$

یکپارچگی چرخه امار در حل مسائل

همان‌طور که دیدید، در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با امار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر امارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نتواند، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام گام‌ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم. کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه امار، گام‌های دیگر را به شدت تحت‌تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم جرایم گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.



کار در کلاس



۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکانی در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق تاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟ این آگاهی کی‌کند می‌شود؟
ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟
افراد سنی

ب) چگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟
دریافت اطلاعات افراد بومی پیرامون سن آنها و تعیین میانگین سنی

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و هر کدام کدام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند. *نا مطلوب بود نتیجه نهایی*

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است. *غیر واقعی بودن معیارها می‌شود نتایج داده‌ها*
ب) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند. *معیارهای غیر واقعی حذف می‌شود*
را با اشکال مواجه می‌کنند.



ت) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، محریان پروژه جلساتی را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری درباره طراحی و برنامه‌ریزی پروژه، برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام می‌کنند. امارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای بر کردن پرسش‌نامه‌ها به منازل مختلف مراجعه می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسش‌نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «قوت شده است».

داده‌های نادرست بوی می‌آید.

ث) پس از گردآوری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیش‌تر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تأیید رسید، بود، نتایج موارد انتظار به دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است. *عدم تعریف مناسب متغیرهای مورد نیاز*

منتهی شده

ج) نتایج را فقط افراد متخصص امار تفسیر کرده‌اند.
عدم شناخت ویژگی‌های منطقه



خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره آموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی. روزی پادشاه انگشتری در مشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مشت چه دارم؟ پسر گفت: «انچه داری گرد است و زرد است و مخوف (میان تهی) است.» پادشاه گفت: «چون نشان‌های راست دادی، پس حکم کن که آن چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غریب (غریب، الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چندین نشان‌های دقیق دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غریب در مشت نگنجد؟»
برگرفته از قیه ما قیه - مولانا جلال‌الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. یا انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تاثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل، بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌اموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

- ۱- پیاده یا با دوچرخه
- ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی
- ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روش می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

ب) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و اماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌اموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می‌شود؟ توضیح دهید.

۳. در هر یک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هر یک از موارد چگونه بر نتایج تاثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی

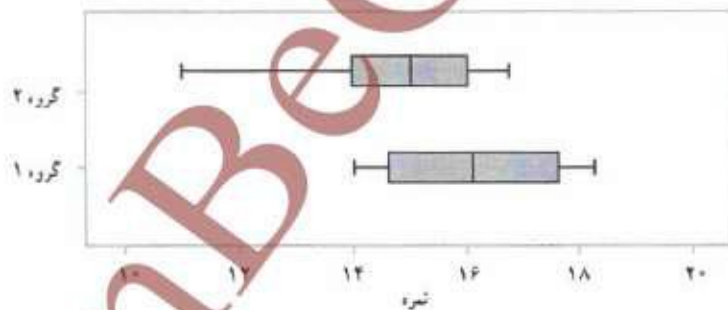
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه های کودک تلویزیون
نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

ب) مسئله: نظرسنجی از دانش آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ پوشهر درباره اینکه به طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده اند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می برد. مغز انسان تشنه خیرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می شنویم، مغز ما کمی تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می دهد که مثلا اگر دانش آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت و گویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقایق و ایده ها برود، به قسمت مهارت ها فرستاده می شود.»
سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی صدا قرار می دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

ب) از مقایسه کمیته گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه ای می گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می تواند گمراه کننده باشد؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک ترند؟

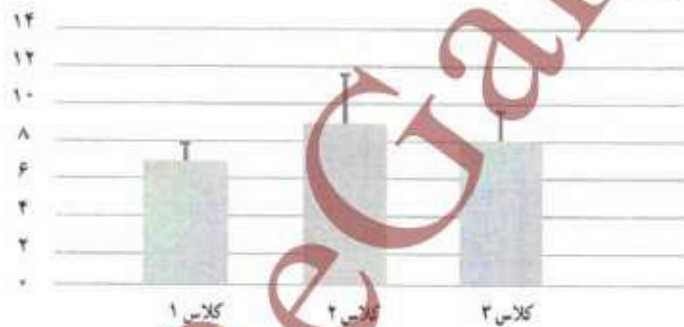
ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه ای می توان تعمیم داد؟

۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۳۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.
ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تاثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و اوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهایی زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

ب) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	۱ کلاس	۲ کلاس	۳ کلاس
میانگین			
انحراف معیار			

ت) چه عواملی می‌تواند بر نتایج این مطالعه تاثیر بگذارد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، باسقم دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

ث) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



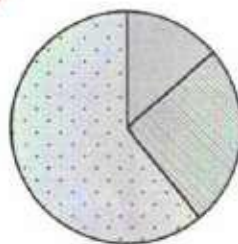
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) یا استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



کمیتر از ۲۰ سال ۲۰ تا ۴۰ سال ۴۰ تا ۶۰ سال

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۱۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌تواند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.
- ۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

کیلومتر در ساعت (سرعت)	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۱۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.» نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه امار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانه حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانید برش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی درباره ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعات‌های مطالعه آزاد دانش‌آموزان و مقایسه آن بین دو گروه از دانش‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه دانش‌آموزان.



حل تمرینهای صفحه ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱:

بررسی وضعیت نمرات درسی دانش آموزان پایه‌ی اول دبستان چند پایه‌ی مختلط شهید احمدی شهرستان بستان خوزستان در سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین ۲:

الف:

جامعه‌ی آماری	دانش آموزان کلاس
نمونه‌ی آماری	دانش آموزان انتخاب شده
اندازه‌ی جامعه	۲۸ نفر
اندازه‌ی نمونه	۹ نفر

ب: پرسش شفاهی (چون تعداد نمونه کم است) / ممکن است در روز جمع آوری اطلاعات مشکلی مثلاً برای سرویس مدرسه پیش آمده باشد و دانش آموزان پیاده به مدرسه آمده باشند.

پ: شیوه‌ی رفتن به مدرسه / کیفی / اسمی

ت: دایره ای، میله ای / مد و نسبت

ث: خیر، چون ممکن است در ایام امتحانات شرایط متفاوتی پیش بیاید.

ج: خیر، نتایج ممکن است قدری تغییر کنند.

تمرین ۳:

الف: (۱) مدیران شیفت شب در نظر گرفته نشده اند. (۲) مدیران نمی توانند نماینده‌ی کل کارمندان محسوب شوند برای رفع مشکل نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تمامی کارمندان صورت گیرد.

ب: ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفته باشند و لذا اطلاعات از آنها دریافت نمی شود. برای رفع این مشکل کافی است مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ: (۱) دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند. (۲) نمونه گیری تصادفی نیست. نمونه‌ی انتخاب نمونه ای تصادفی و به تناسب دانش آموزان توصیه می شود.

تمرین ۴:

الف: تقریباً مساویند. (ولی گروه اول نتیجه‌ی بهتری دارد)

ب: دامنه‌ی تغییرات در گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است. دامنه‌ی میان چارکی در گروه ۱ بیشتر از گروه ۲ است.

پ: مقدار کمینه‌ی گروه ۱ برابر چارک اول گروه ۲ است. (گروه ۱ بهتر است).

ت: گروه الف، چون داده‌ی دور افتاده دارد.

ث: گروه ۱، نمودار متقارن است. (عدم وجود داده‌ی دور افتاده)

ج: جامعه‌ی گروه ۱ به دلیل اطمینان از درست بودن نتایج

تمرین ۵:

۲۲ و ۲۰ و ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۰ و ۱۰ و ۶ و ۴ و ۰



جمع کل داده ها برابر ۱۸۹ و میانگین آنها ۱۲/۶

الف : داده‌ی آخر را به یک عدد دوره افتاده مانند ۵۰ تغییر می دهیم.

ب : میانگین این داده ها ۱۲/۶ می باشد . لذا می توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۳ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند (۱۲/۶ و ۹/۶) . بدین شکل میانگین تغییر نمی کند. از طرفی چون وسط بودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

تمرین ۶:

الف : ممکن است میزان ساعت خواب توسط دانش آموزان با دقت بیان نشود. برای رفع این مشکل لازم است از آنها بخواهیم ساعت خواب و بیداری خود را قبل از خواب و بعد از بیداری یادداشت نموده و بعد اعلام نمایند.

ب : کمی / نسبتی (چون صفر مطلق دارند).

پ :

گروه	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۸	۱/۸

ت : اولاً : ممکن است برخی از دانش آموزان به دلیل مسائلی مانند میهمانی / جشن تولد / بیماری و ساعت خواب آنها موقتاً تغییر کند. ثانیاً : میزان تأثیر خواب بر یادگیری اگر تعریف عملیاتی نشود، نتایج مطالعه ارزش نخواند داشت.

ث : والدین دانش آموزان ، خود بهتر از خود دانش آموزان از میزان ساعت و خواب فرزندان خود و تأثیر آن بر یادگیری آگاهند.

تمرین ۷:

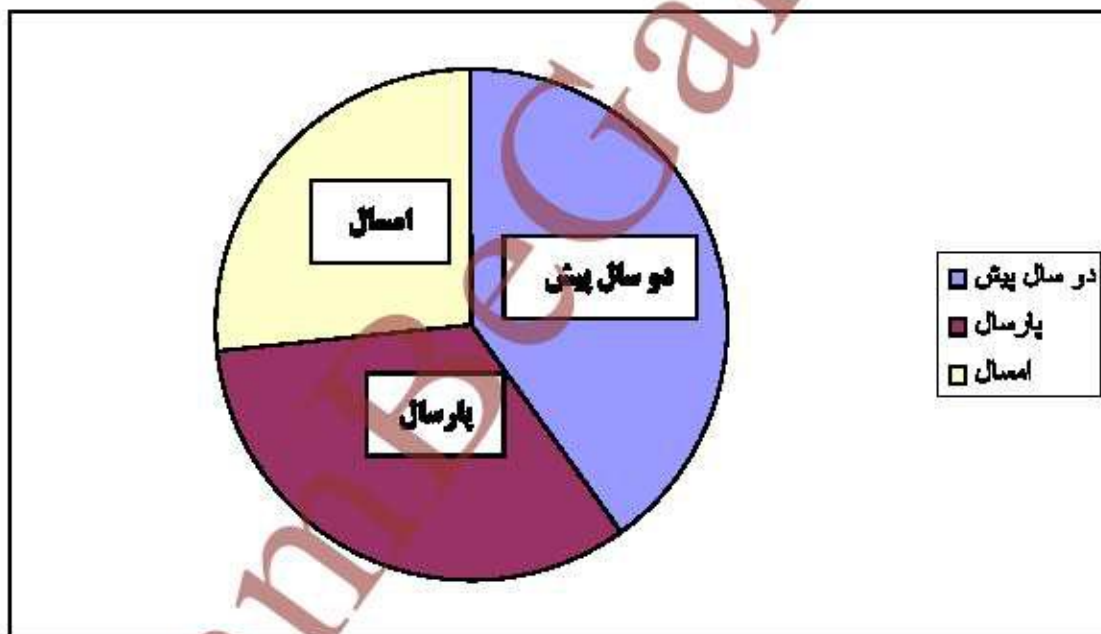
الف: ۳۰ نفر

ب: ۳۰ نفر (روند نزولی دارد).

پ:

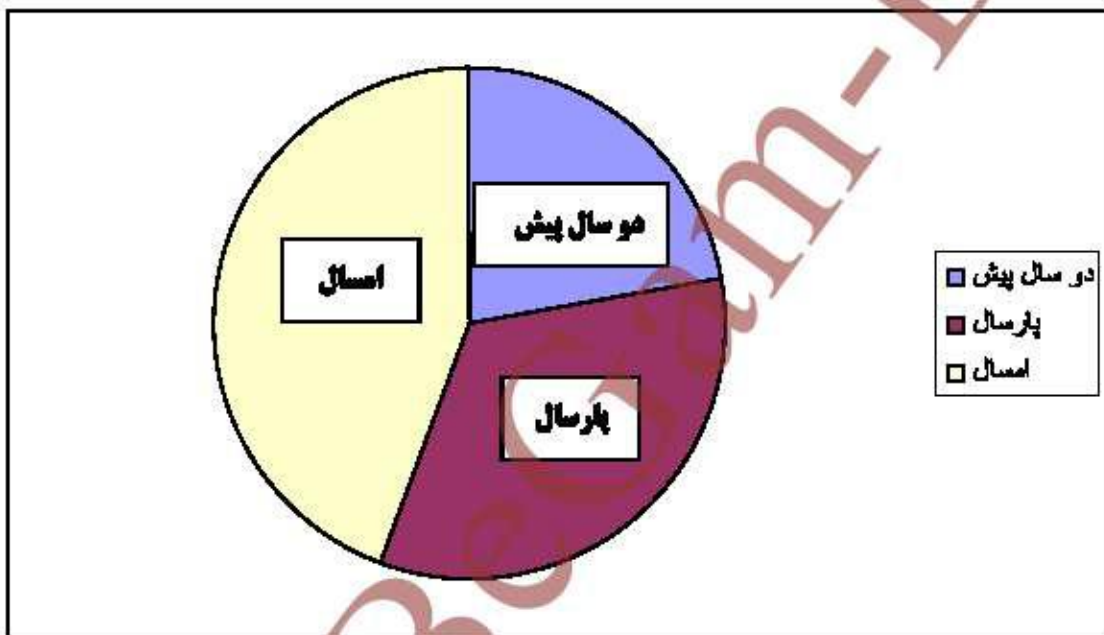
نمودار دانش آموزان مدرسه

سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۶۰	$\frac{60}{150} \times 360 = 144$
پارسال	۵۰	$\frac{50}{150} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{150} \times 360 = 96$
جمع	۱۵۰	۳۶۰



نمودار سایر اعضا

سال	فراوانی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۲۰	$\frac{۲۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۸۰$
پارسال	۳۰	$\frac{۳۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۶۰$
جمع	۹۰	۳۶۰



ت : عواملی مانند مدیریت / تبلیغات / اوقات فراغت / هزینه و تناسب کتابهای موجود با سن اعضا نیز ممکن است اثرگذار باشد.

تمرین ۸ :

الف :

دوره ی سنی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
کمتر از ۲۰ سال	۵۴
بین ۲۰ الی ۴۰	۹۰
بین ۴۰ الی ۶۰	۲۱۶ (۱)
جمع	۳۶۰

$$۳۶۰ - (۹۰ + ۵۴) = ۲۱۶$$

$$\frac{۲۱۶}{۳۶۰} = \frac{x}{۱۰۰} \rightarrow x = \frac{۲۱۶ \times ۱۰۰}{۳۶۰} = ۶۰ \text{ درصد}$$

ب : مورد اول، زیرا

اولاً : در ساعات اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانياً : افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانش آموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

نماینده ۹:

اشکال این نتیجه گیری این است که تعداد کمتری از رانندگان خودروها ممکن است خود با سرعت ۸۰ به بالا به رانندگی کنند که این مورد ملاحظه نشده است. از طرفی تعداد کل جهت مقایسه س بهتر نیز در اختیار نیست.

توجه به جدول و عدم کمک گرفتن از نظرات رانندگان موجب این تصور نادرست شده است.

گروه آموزشی دوره های روزانه
موسسه استانی خوارشاهان

@GambBe

فصل ۲- الگوهای خطی

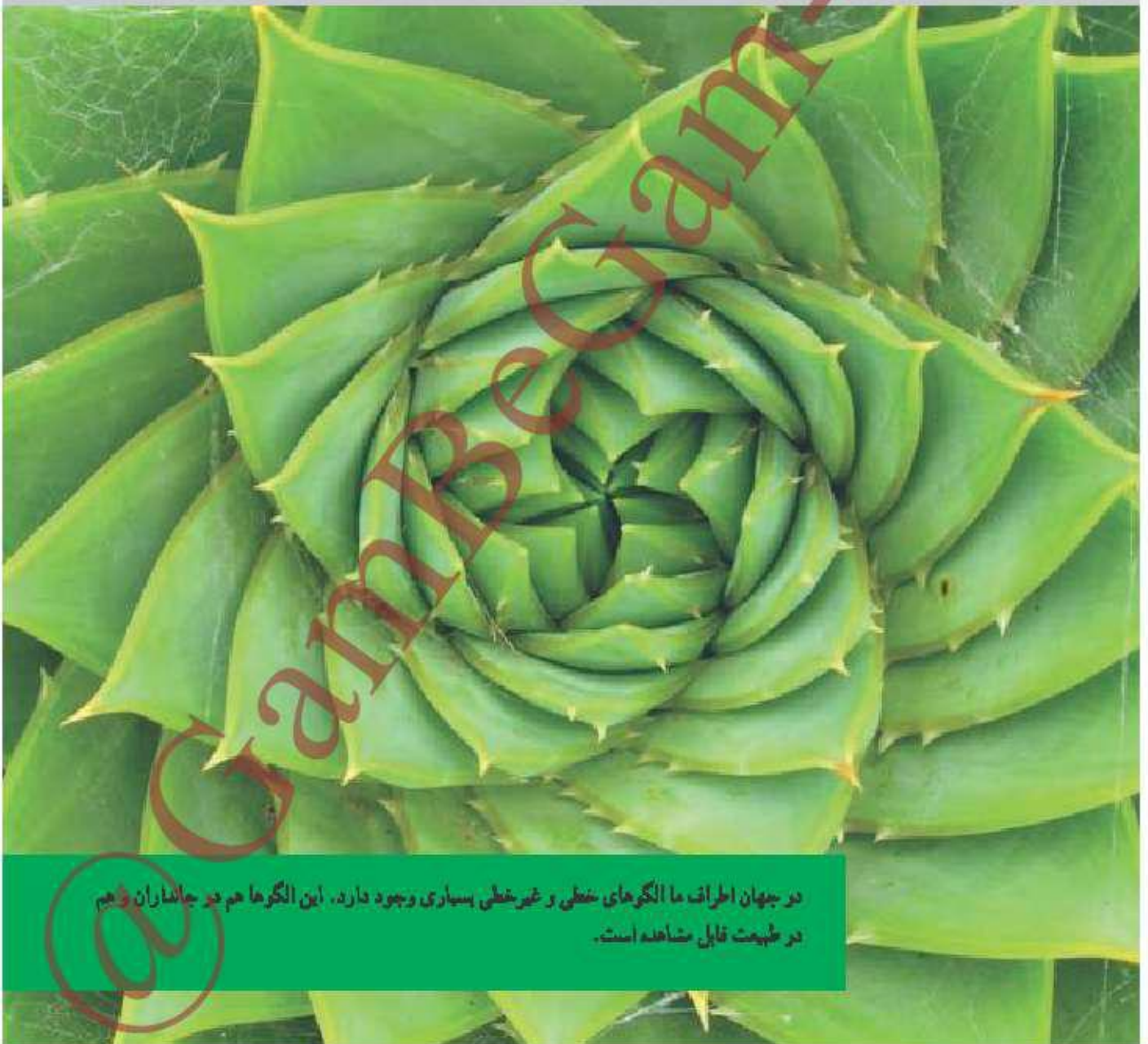
مدل سازی و دنباله

درس ۱

دنباله حسابی

درس ۲

إن فی خلق السموات والأرض واختلاف الليل والنهار آياتٍ لأولی الألباب (آیه ۱۹۰ سوره مبارکه آل عمران)
«و مسلماً در آفرینش آسمان ها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه های (بروفتنی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

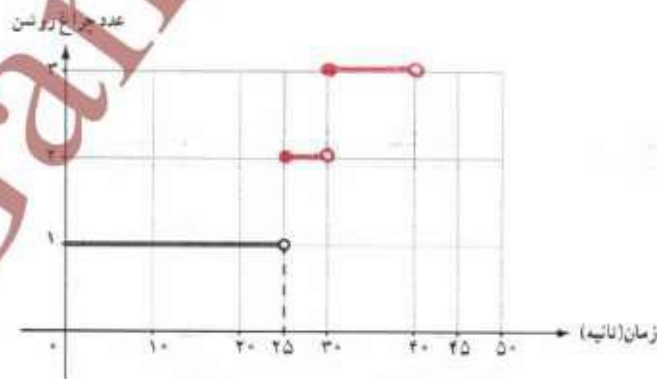
در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

فعالیت

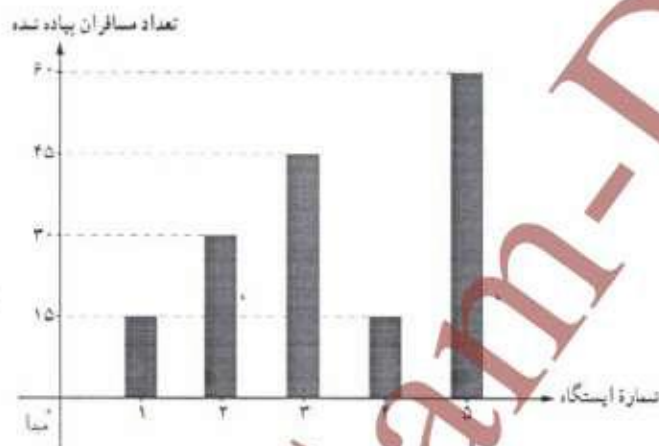


۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۲۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد، $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض:

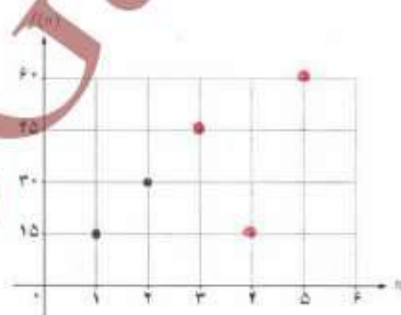
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases} \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, \quad R_f = \{1, 2, 3\}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر 11، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰



$$f(n) = \begin{cases} \dots, 15, 30, \dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

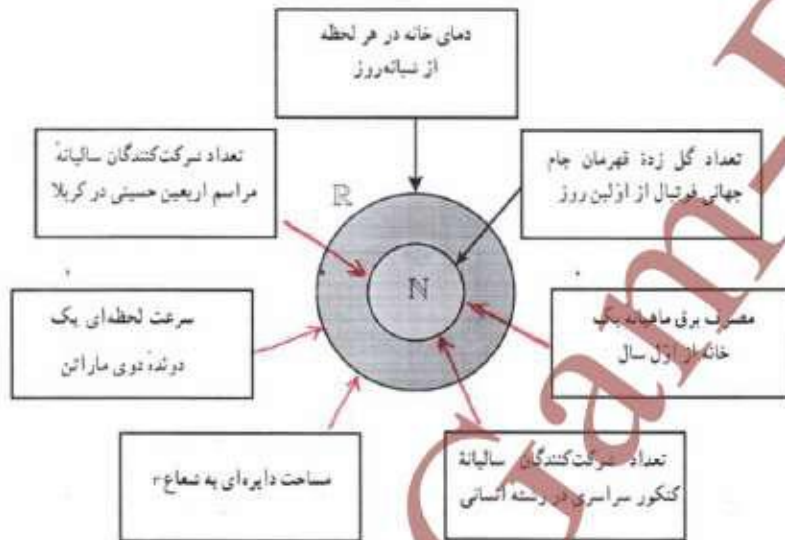
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\} \quad R_f = \{15, 30, 45, 15, 60\}$$

یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵ام است و تابع در تمامی این زمان قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

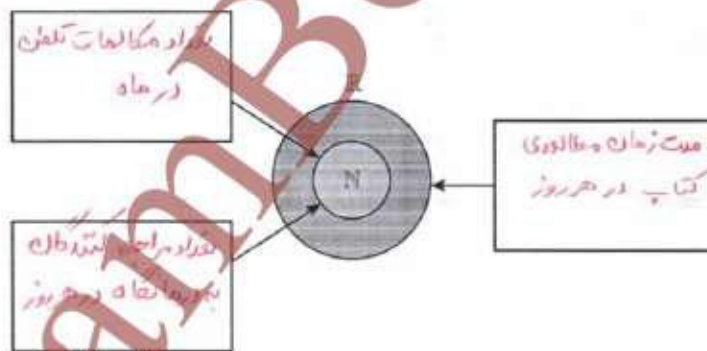
در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر نتایج مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:

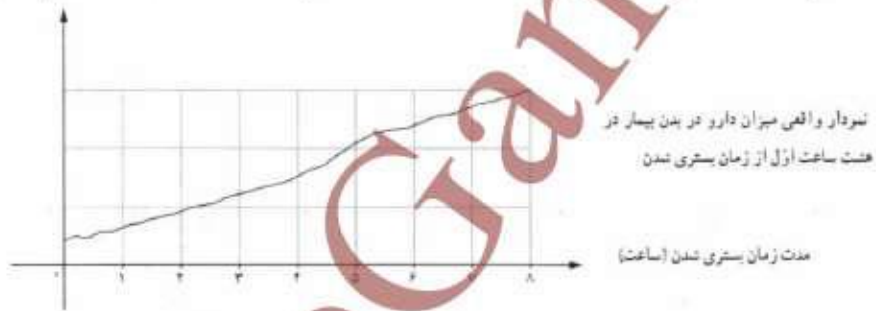


در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

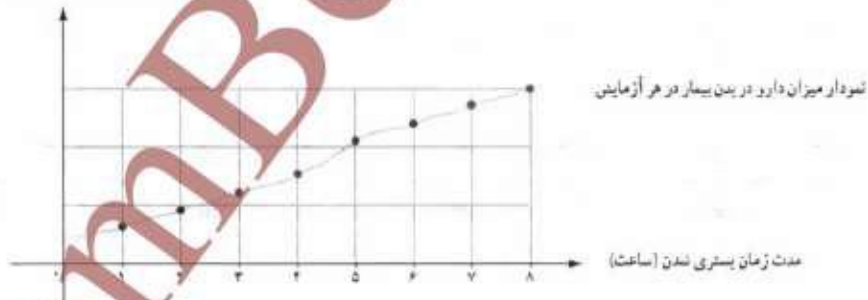
کار بردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می کنیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه روز اندازه گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می کند. به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی گرم)



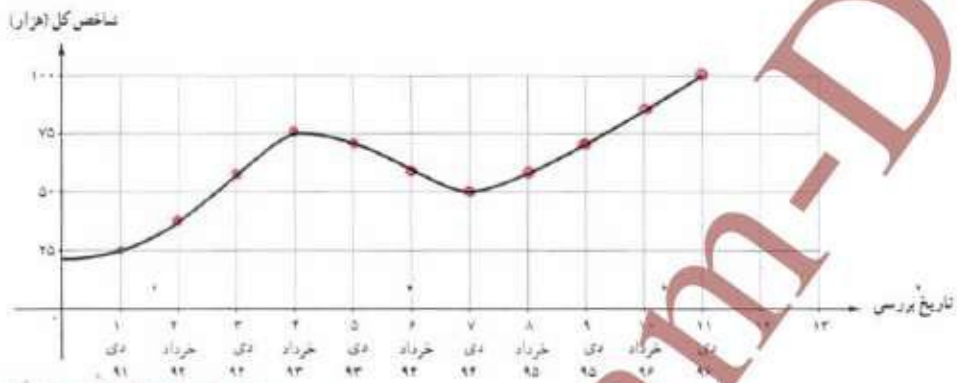
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی گرم)



در فعالیت صفحه بعد، نمونه ای دیگر از همین کاربرد را می بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می‌دهد.



اصول

از دی ماه ۹۱ تا دی ماه ۹۲، از فروردین ۹۳ تا دی ماه ۹۴، از دی ماه ۹۴ تا دی ماه ۹۵، از فروردین ۹۶ تا دی ماه ۹۶

الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا، اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و دی ۱۳۹۶ را بازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$	۲۵	۴۰	۶۰	۷۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	
مقدار شاخص کل (هزار)											

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۱) ۸۵,۰۰۰ (۲) ۱۰۵,۰۰۰ (۳) ۱۱۲,۵۰۰ (۴) ۱۰۰,۰۰۰ (۵) ۱۲۵,۰۰۰

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

۱. شاخص بورس تهران، TSEPIX : Tehran Price Index

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت». اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها - که در اخبار مطرح می‌شود - «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت بیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times ۱۰۰$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز» \times «تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه» \times «تعداد سهام در روز بررسی» است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

- فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۱۵	۱۲۰۰	۶۰
B	۵۰۰	۳۰	۱۵۰۰	۸۰

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{۱۲۰۰ \times ۶۰ + ۱۵۰۰ \times ۸۰}{۱۰۰۰ \times ۱۵ + ۵۰۰ \times ۳۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۹۲۰۰۰}{۹۹۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۹۳ \times ۱۰۰ = ۱۹۳$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است.

توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰ واحد به ۲۰۰ واحد برسد، یعنی ۵٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵٪ بوده است.

۱ فرمول بالا به روش محاسبه «لاسیرزه» (Laspeyres) معروف است.

در سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک ناهنجری یا دامنه اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۱، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشند:

$a_6 = 32$
 $a_7 = 64$

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر نهم و هفتم مثلث خیام، جملات نهم (a_9) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

ب) بر اساس رابطه میان a_1, a_2 و رابطه میان a_2, a_3 و نیز a_3, a_4 می‌توان معادله‌ای برای a_n را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می‌آید؟ چرا؟ $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 1$

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی می‌نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه‌ای معلوم کنید.

بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

ه) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 1$

و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

در قسمت «ج» هر جمله به دو جمله قبلی وابسته است. در قسمت «د» هر جمله به یک جمله قبلی وابسته است.

۱- کتاب ریاضی هفتم و هشتم
 ۲- خواندن کتاب ریاضی دهم

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

(الف) رابطه یا جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)

(ب) رابطه ای برحسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

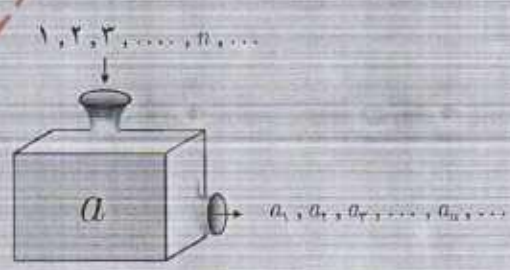
$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots \end{array}$$

با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت 3 به جمله پیشین به دست می آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و یا می توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای \mathbb{N} را به ترتیب به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



The diagram shows a box labeled 'a' representing a function. Above the box, the natural numbers 1, 2, 3, ..., n, ... are listed. An arrow points from the number 1 down into the top of the box. From the right side of the box, an arrow points to the sequence of terms a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳
$b_n = n^2 - ۱$	۰، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \dots$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

مثال) برای جملات دنباله زیر:

۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ۲۴۳، ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می‌کنیم:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 3^2 \times 3 \quad \text{و} \quad a_4 = 81 = 3^3 \times 3$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی‌کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n و n را مشخص کنیم:

$$\text{اولین جمله} \quad n=1 \rightarrow a_1=3$$

$$\text{دومین جمله} \quad n=2 \rightarrow a_2=9=3^2$$

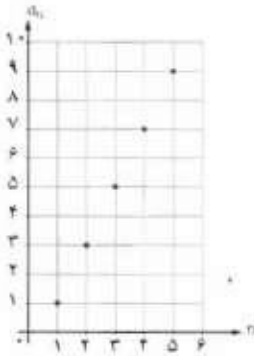
$$\text{سومین جمله} \quad n=3 \rightarrow a_3=27=3^3$$

پس، ضابطه تابعی به صورت $a_n = 3^n$ به دست می‌آید.

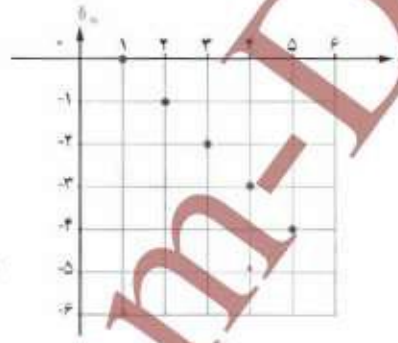
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد:

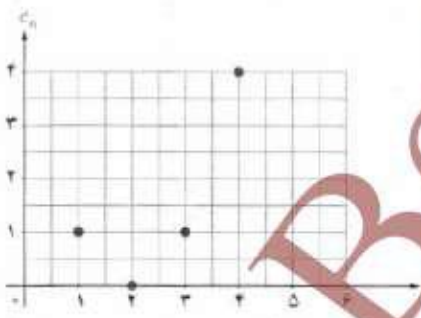
$$a_n = 2n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



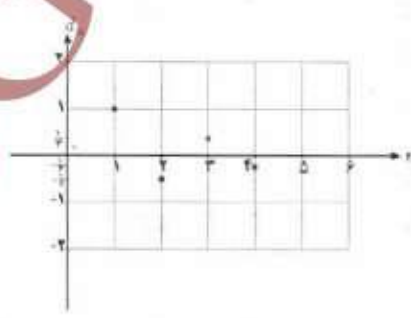
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



$$c_n = (n-2)^2 \quad 1, 0, 1, 4, \dots$$



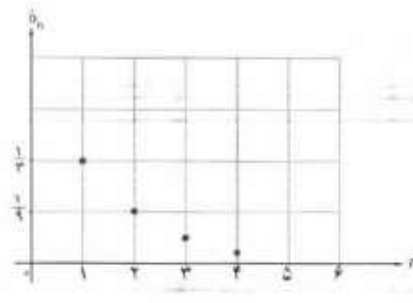
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



$$e_n = 2^n$$



$$f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 2^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ $a_1 = 1$	1, 2, 4, 8, 16, ...
	$a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	1, 1/3, 1/9, 1/27, ...
	$a_n = 2n + 1$	$a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 3$	3, 5, 7, 9, ...
	$a_n = n$	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	1, 3, 6, 10, ...
	$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$		1, -1/2, 1/4, -1/8, ...
	$a_n = -n^2$		-1, -4, -9, -16, ...
		$a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می نامند.

تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود: هزینه هر متر مکعب یا توجه به طبقه مصرف \times میانگین مصرف = آب‌بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب‌بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۲	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۲۲/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۳۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب‌بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌بها را مشخص می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

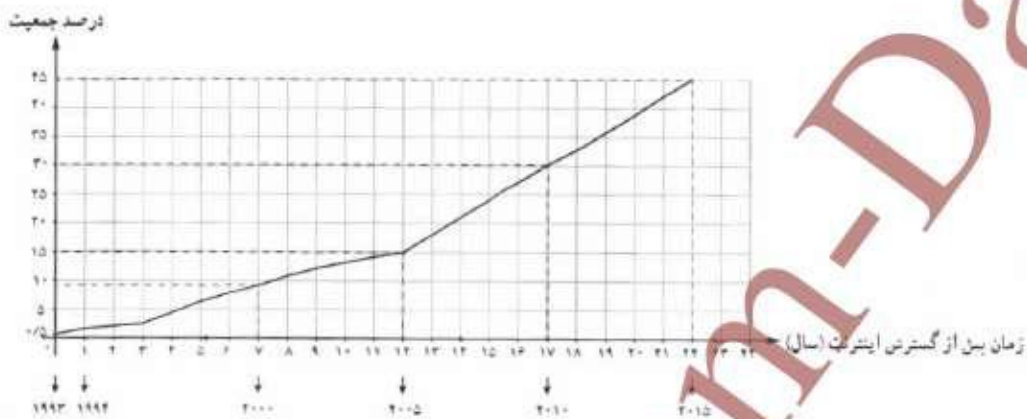
- | | | |
|----------------------------|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | ب) میزان استفاده دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | ج) حجم مکعبی به ضلع x |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی |

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.tppww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی پس از محاسبه حاصل ضرب گفته شده بر اساس طبقه مصرف عددی ثابت از عدد دست آمده کم می‌شود.

۲. با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{4}$ هزینه واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۳. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران 18 است.

۲. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیا است، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.
ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{3})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_7$ ب) $c_7 - d_7$ ج) $b_7 + d_7$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ ، $a_1 = -1$ ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

^۱ data.worldbank.org

جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
5, 8, 11, 14, 17, ...			
4, 1, 4, 1, 4, 1, ...			
1, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{4}$, 5, $\frac{1}{6}$, ...			
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$			

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{4}n + 3$

ب) $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} n & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right)$ $a_1 = k$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_n را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

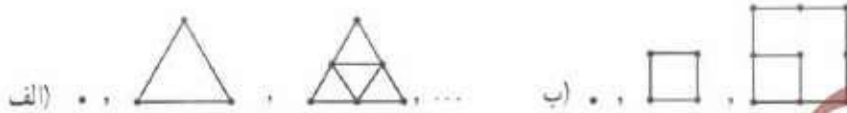
الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پسماندهای صنعتی کارخانه ها به یک دریاچه، ۲۵٪ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵٪ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

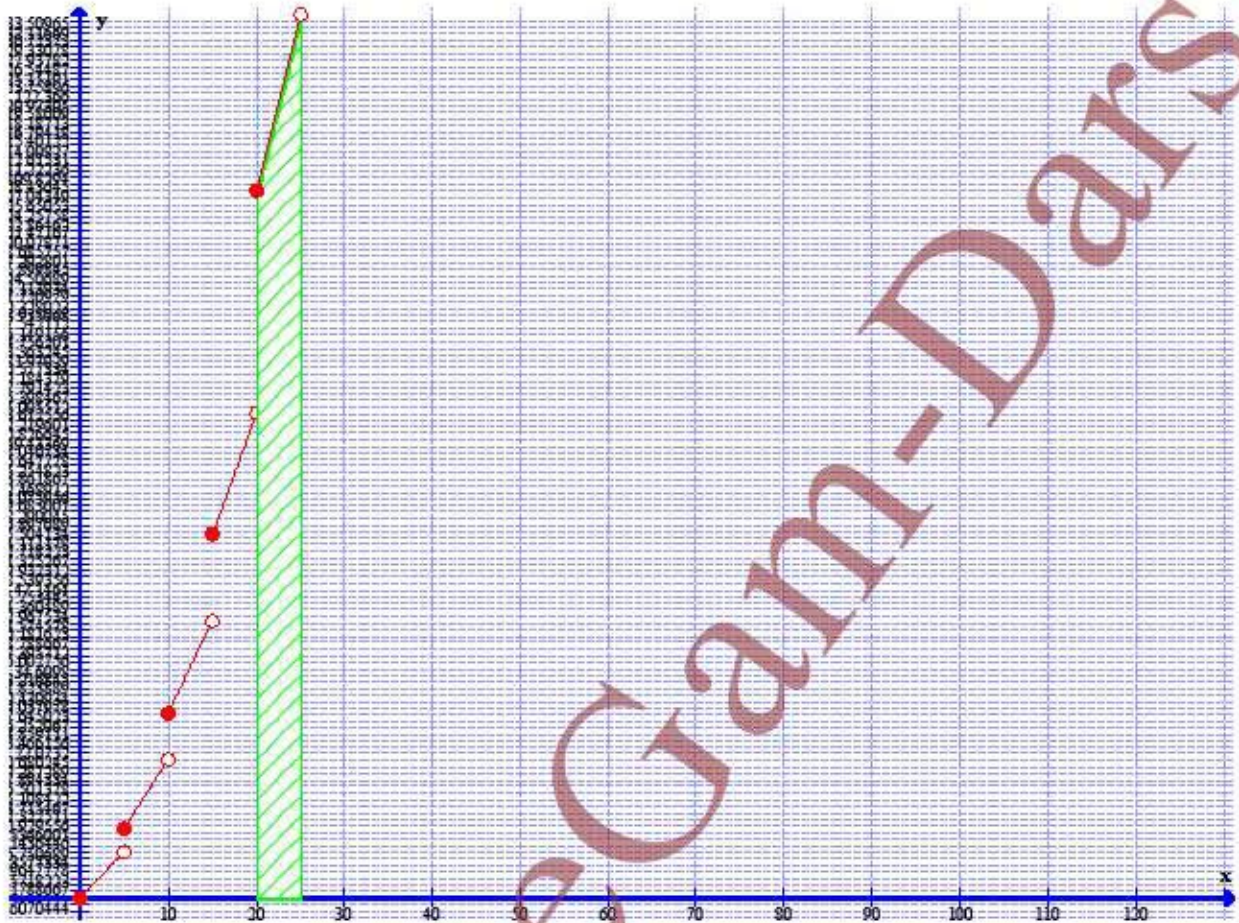


دریاچه گهر، لرستان

بازی و ریاضی

آیا می توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = a_2 = 1$$



$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$[, /) \cup [/ , /) \cup \dots \cup [/ ,)$$

$$[,)$$

$$f(/) \quad / \quad / \quad /$$

N	R	
	✓	
✓		
	✓	
✓		
✓		

$f() / f()$

t		
$f(t)$		

m _____
 $h y_0 mt_0$ ()

$y mt h y t$

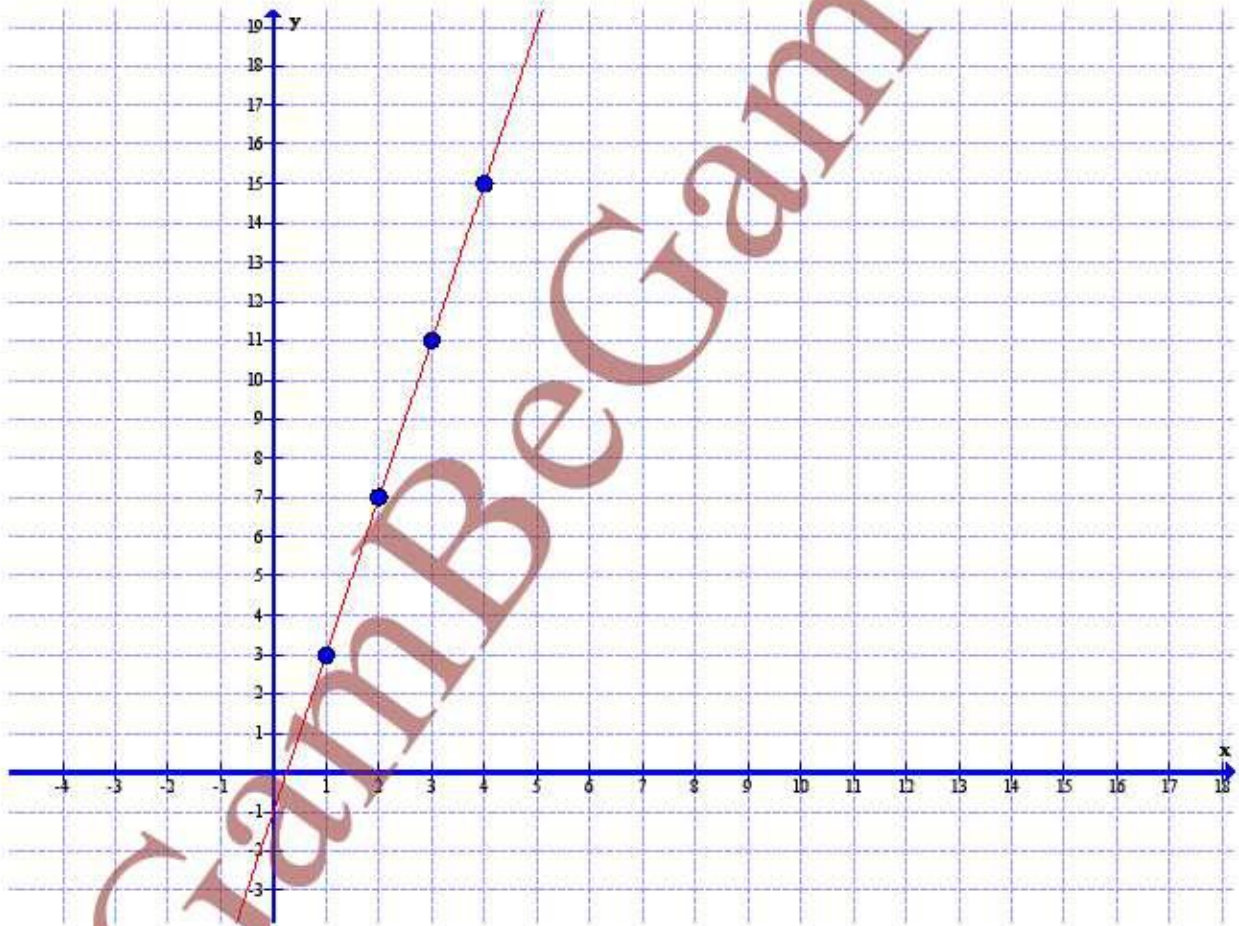
$f(t) t$

$f() ()$



	y	x
x		
y		

	a_n	n		
n				
a_n				



a_n n

a_n a_n

m

a_n a_n m

$$a \cdot b \quad (-) \quad - \quad -$$

$$c \cdot d \quad \left(\frac{\quad}{\quad}\right) \quad (\quad) \quad - \quad -$$

$$b \cdot d \quad (-) \quad (\quad) \quad - \quad -$$

$$a_n \quad -a_n \quad ; \quad a$$

$$a \quad \quad \quad a \quad -a \quad -(\quad) \quad -$$

$$a \quad -a \quad -(\quad) \quad - \quad \quad a \quad -a \quad -(\quad) \quad -$$

$$a \quad -a \quad -(\quad) \quad -$$

$$a_n \quad \frac{\quad}{a_n} \quad ; \quad a$$

$$a \quad \quad \quad a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad -$$

$$a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad - \quad \quad a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad - \quad -$$

$$a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad -$$

$$a_n \quad a_n \quad a_n \quad a_n \quad ; \quad a \quad a \quad a$$

$$a \quad a \quad a$$

$$n \quad a \quad a \quad a \quad a$$

$$n \quad a \quad a \quad a \quad a$$

$$a_n = a_n \cdot ()^n ; a$$

a

$$n = a \cdot a \cdot () \cdot ()$$

$$n = a \cdot a \cdot ()$$

$$n = a \cdot a \cdot () \cdot ()$$

$$n = a \cdot a \cdot ()$$

$$\frac{a_n}{a_n} = \frac{a_n}{n} ; a$$

$$a_n = a ; a \quad a_n = a ; a$$

$$\frac{a_n}{n} = \frac{n}{n}$$

$$\frac{a_n}{n} = \frac{n}{n}$$

$$a_n = \frac{n}{n}$$

a

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

a

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -() \quad \text{—}$

$n \quad a \quad a \quad (\text{—}) \quad \text{—}$

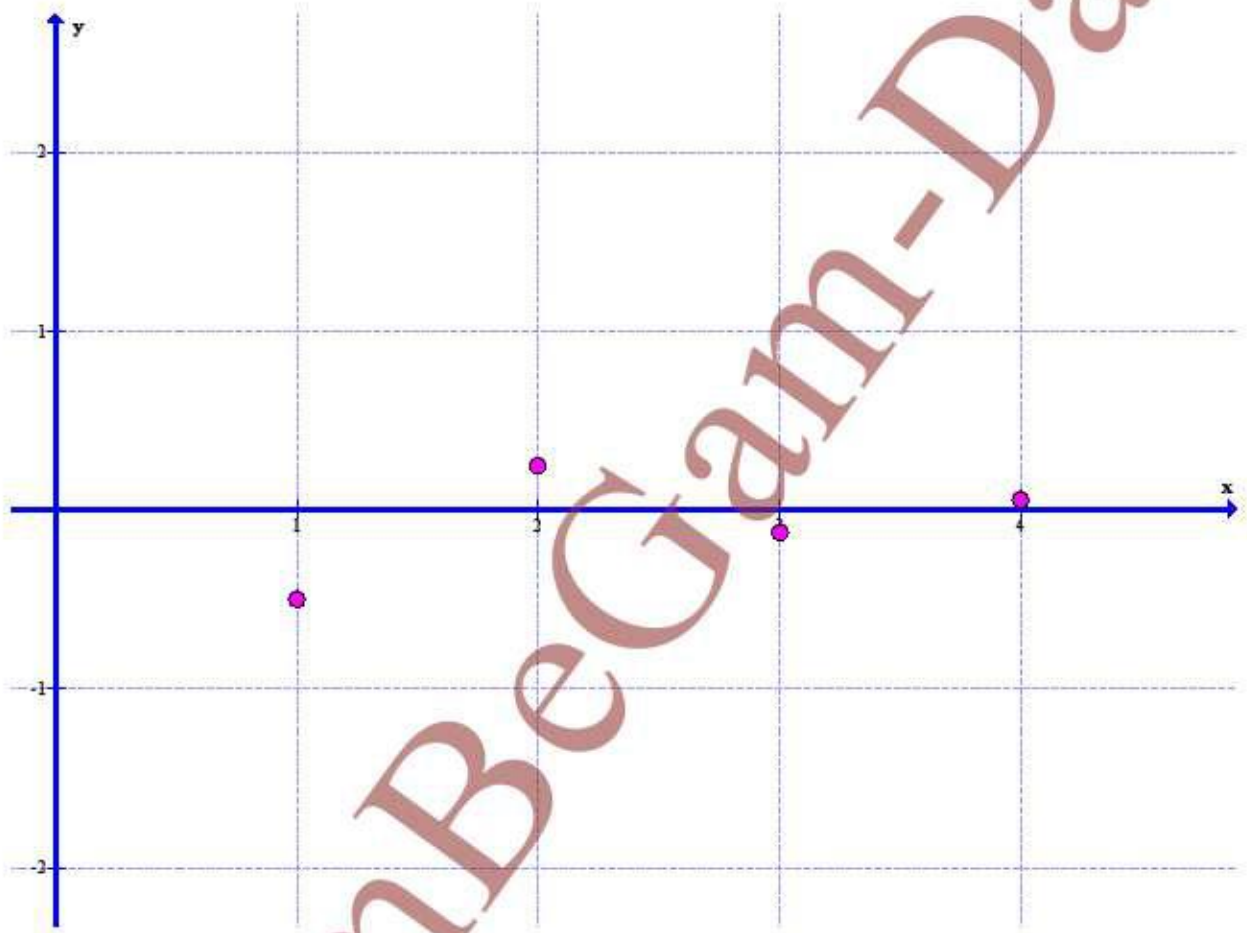
— —

		$a_n = -n$		
n				
a_n	-		-	



@GambBeGam-Darsi

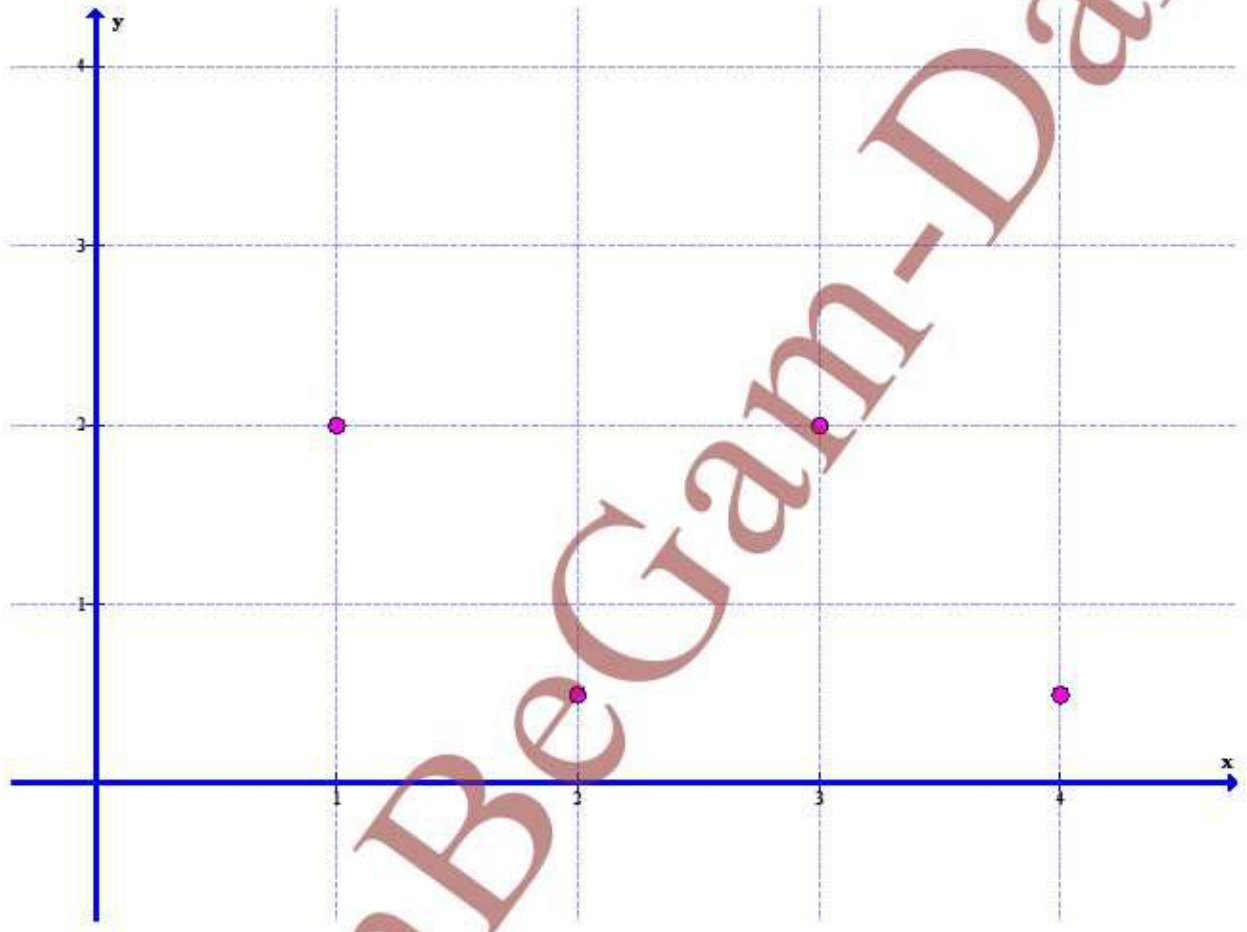
$a_n \quad (-)^n$				
n				
a_n	-	-	-	-



@GamBeGam-Darsi

$$a \quad a \quad \frac{a}{a} \quad - \quad a \quad \frac{a}{a} \quad a \quad \frac{a}{a} \quad -$$

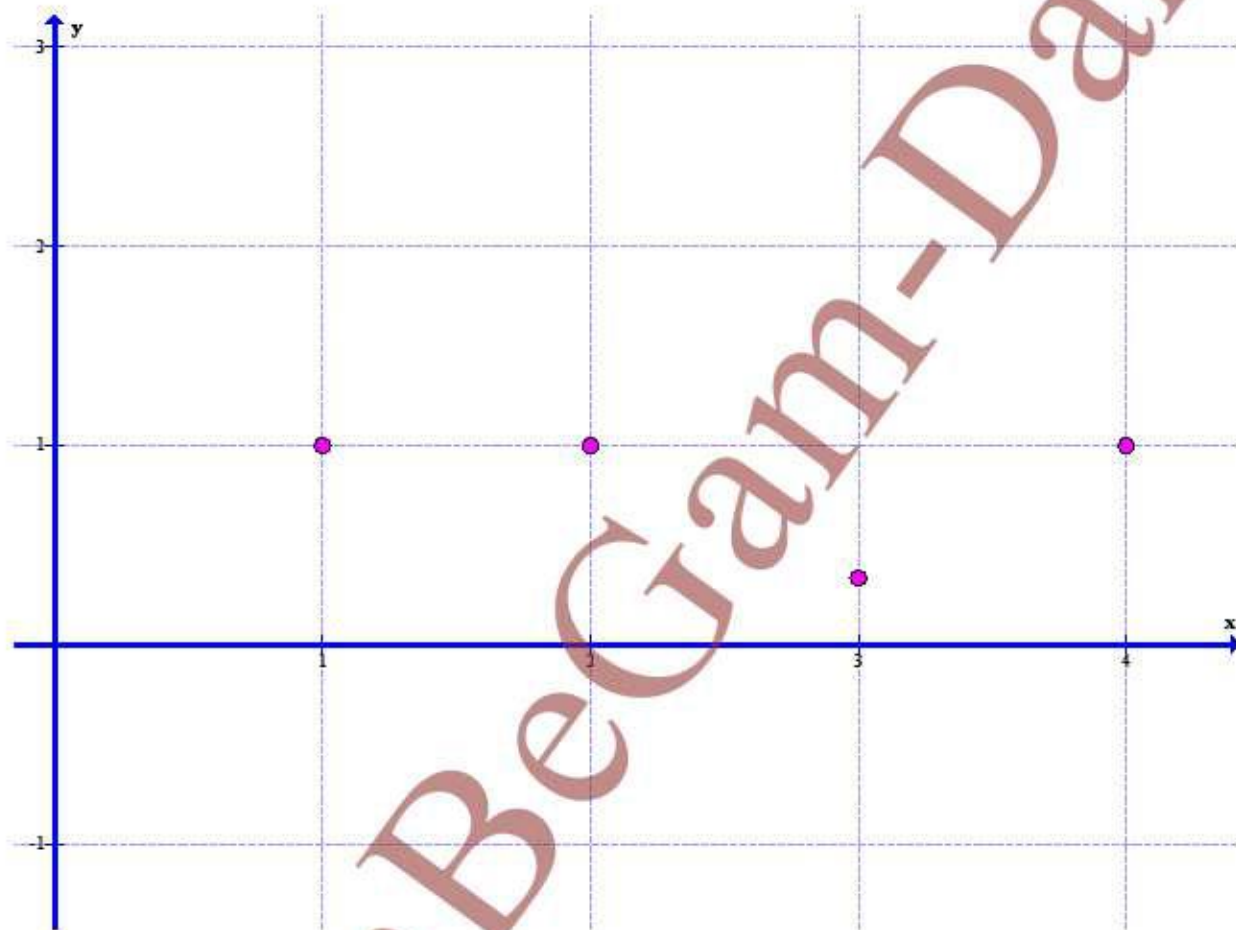
n				
a_n		-		-



@GamBeGam-Darsi

$a \quad a \quad a \quad - \quad a$

n				
a_n			-	



k

$a_n \quad -(a_n \frac{\quad}{a_n}) ; a$

$a \quad -(a \frac{\quad}{a}) \quad -(\quad -) \quad -$

$a \quad -(a \frac{\quad}{a}) \quad -(\quad -) \quad -(\quad -) \quad - \quad - \quad - \quad /$

$$a_n = -\left(\frac{a_n}{a_n}\right); a$$

$$a = -\left(\frac{a}{a}\right) = -(-) = -()$$

$$a = -\left(\frac{a}{a}\right) = -(-) = - - - -$$

$$a_n = -\left(\frac{a_n}{a_n}\right); a$$

$$a = -\left(\frac{a}{a}\right) = -(-) = -()$$

$$a = -\left(\frac{a}{a}\right) = -(-) = - - - -$$

$$a_n = a_n (n); a$$

$$a$$

$$n = a \cdot a ()$$

$$n = a \cdot a ()$$



گام به گام داری
@GamBeGamDarsi

$P_n \quad P_n \quad \neg P_n \quad ; \quad P$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg()$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg()$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg() \quad / \quad /$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad / \quad \neg(/)$
 $/ \quad / \quad / \quad /$

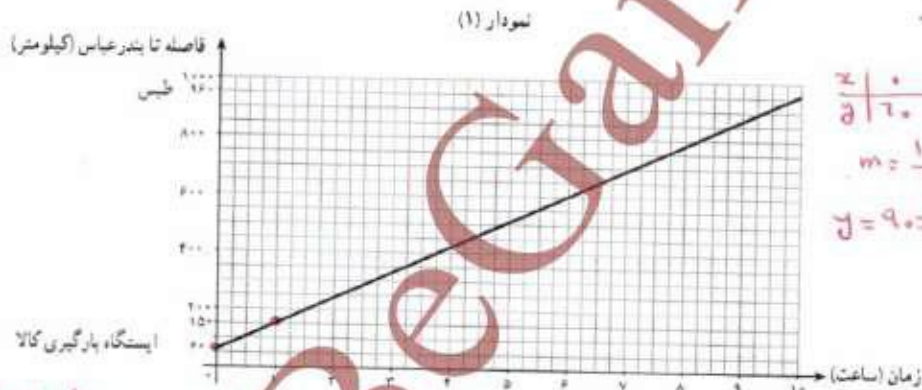
$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad / \quad \neg(/)$
 $/ \quad / \quad / \quad /$

@GambBeGam-Darsi

درس ۲ دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طیس حرکت می‌کند.

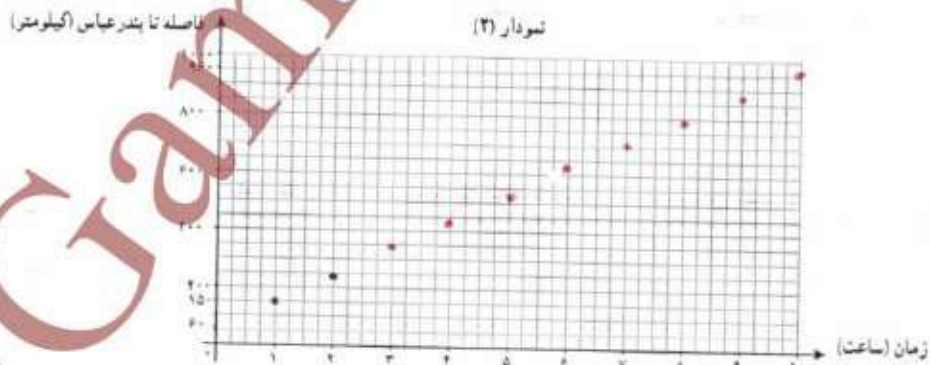


$$\begin{array}{r|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & 60 & 150 \end{array}$$

$$m = \frac{150 - 60}{1 - 0} = 90$$

$$y = 90x + 60$$

الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.
 ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر ساعت را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

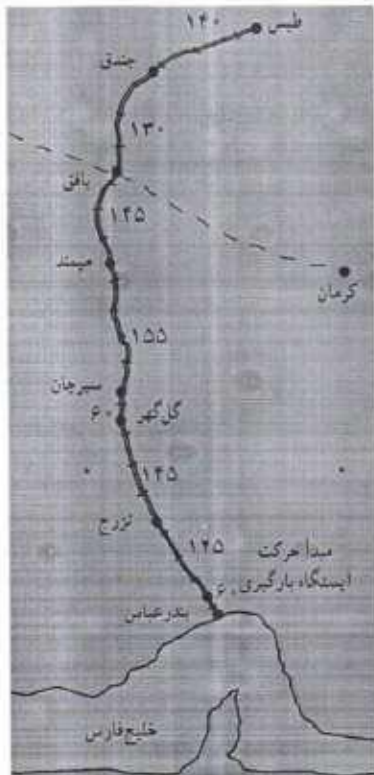


ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

۶۱

دامنه و برد نمودار (۱) زیر مجموعاً از اعداد حقیقی است.
 ولی دامنه و برد نمودار (۲) زیر مجموعاً از اعداد طبیعی است.





د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.

جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - زوز	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
زوز - گل کهر	۱۴۵	$۱۸۵ + ۱۴۵ = ۳۳۰$
گل کهر - سرجان	۶۰	$۳۳۰ + ۶۰ = ۳۹۰$
سرجان - میمند	۱۵۵	$۳۹۰ + ۱۵۵ = ۵۴۵$
میمند - بافتیق	۱۴۵	$۵۴۵ + ۱۴۵ = ۶۹۰$
بافتیق - جندق	۱۳۰	$۶۹۰ + ۱۳۰ = ۸۲۰$
جندق - طبس	۱۴۰	$۸۲۰ + ۱۴۰ = ۹۶۰$

ه) با فرض اینکه n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰ = ۱۵۰ + ۹۰ = ۲۴۰$	$b_3 = a_2 + ۹۰ = ۲۴۰ + ۹۰ = ۳۳۰$	$a_4 = a_3 + ۹۰ = ۴۲۰$	$a_5 = a_4 + ۹۰ = ۵۱۰$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + ۹۰ = ۶۰۰$	$a_7 = a_6 + ۹۰ = ۶۹۰$	$a_8 = a_7 + ۹۰ = ۷۸۰$	$a_9 = a_8 + ۹۰ = ۸۷۰$	$a_{10} = a_9 + ۹۰ = ۹۶۰$

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاه ها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ایستگاه بافتیق - مقایسه مسافت و فاصله

از دو جدول ۶۲

$a_7 = ۶۹۰$
فاصله ۶۹۰ کیلومتری



ز با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + \dots + 6 \cdot 9 \\ a_7 = a_1 + \dots + 6 \times 9 \\ a_7 = a_1 + \dots + 6 \times 9 \\ a_7 = a_1 + \dots + 6 \times 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_1 + \dots + 10 \cdot 9 \\ a_{11} = a_1 + \dots + 10 \times 9 \\ a_8 = a_1 + \dots + 7 \times 9 \\ a_8 = a_1 + \dots + 7 \times 9 \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 9 \quad (1)$$

(رابطه بازگشتی) $a_n - a_{n-1} = 9$

$$a_n - a_m = (n-m) \cdot 9$$

ح) کدام ویژگی دنباله «a» باعث برقراری روابط بالا شده است؟ **افزایش شدن ۹ در هر جمله بر اساس ویژگی ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با حیطه تابع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟**

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 9$$

$$\rightarrow a_n = a_1 + 9n - 9$$

$$a_1 = 15 \rightarrow a_n = 9n + 6$$

$$y = 9x + 6$$

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله « a » این دنباله با

رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ معرفی می‌شود.

« d » را اختلاف مشترک دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار

ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence
Common Difference

کار در کلاس

$$a_{n+1} - a_n = d$$

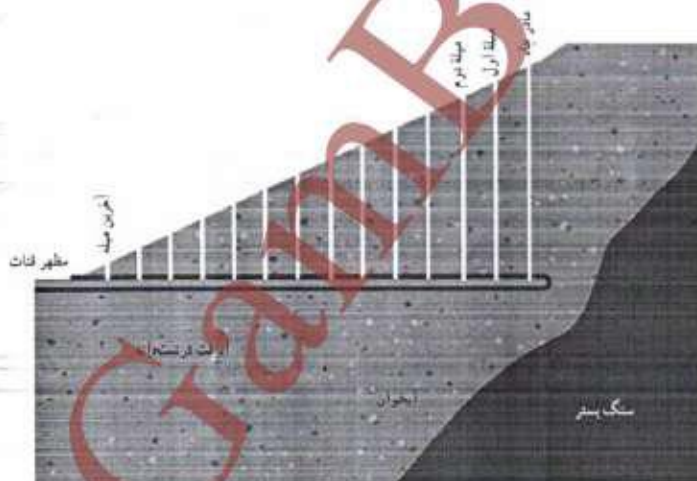
۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

۲. نسبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک» d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
 ۳. جدول زیر را کامل کنید.
 اگر d مثبت، برابر d افزایش و اگر d منفی، برابر d کاهش داشته باشد.
 ولی اگر d صفر باشد، جملات مساویند.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d	$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots$	$a_n = a + (n-1)d$
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	-۳	۴, ۱, -۲, -۵, -۸, ...	$a_n = 4 + (n-1)(-3)$
۴	$-\frac{1}{2}$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \dots$	$a_n = 4 + (n-1)(-\frac{1}{2})$
-۳	۵	-۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...	$a_n = -3 + 5(n-1)$

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیر زمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادر چاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقتی در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.



در یک منطقه، مقتی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول $29/5$ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله $1/5$ متر باشد، این مقتی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

۱. مقتی: به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

$$n = \text{تعداد چاه‌ها}$$

$$\rightarrow -29 = -1/5n \rightarrow n = 58$$

$$a_n = a_1 + (n-1)(-1/5)$$

$$\rightarrow 1,5 = 30 + (n-1)(-1/5) \rightarrow 1,5 - 30 = -1/5n + 1/5 \rightarrow -28,5 - 1/5 = -1/5n$$

$$a_1 = 29,5, a_2 = 29, \dots, a_n = 1,5$$

تعداد چاه‌ها

خواندنی سوی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نو، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کانال و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامه ناصر خسرو به قنات گناباد اشاره شده است: «قناتی با عمق مادر جاه پیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزارساله».

حفر صدها جاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت‌فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همناست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق انسان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی‌آبی را نه تنها غلٹی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر محب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. آنها با نگاه دیگری از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارج بزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و جاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، مشخص می‌نمود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روز خود را با لباس سفید و اشهد گویان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کانال و قنات بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شیسی ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانس زمین‌نازی به وجود بست برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کانال، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون جاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. از آن رو که در سدهای آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله‌های جاه‌ها، آب توسط جاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند^۱.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نيل به توسعه پایدار، نوشته شده است: «قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کانال دست‌کم به ۸۰۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد».

بیش از ۴ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشند؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱ طبق گزارش‌های رسمی، میانگین بارش جوی کشور ۲۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۶۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر غلوت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

فعالیت

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3 + 2(1-1) = 3 + 0 = 3$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 6$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 3 + 2(2-1) = 3 + 2 = 5$$

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

$$n=3 \rightarrow a_3 = 3 + 2(3-1) = 3 + 4 = 7$$

لقد با محاسبه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می‌کنند؟

$$m = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

بیشتر

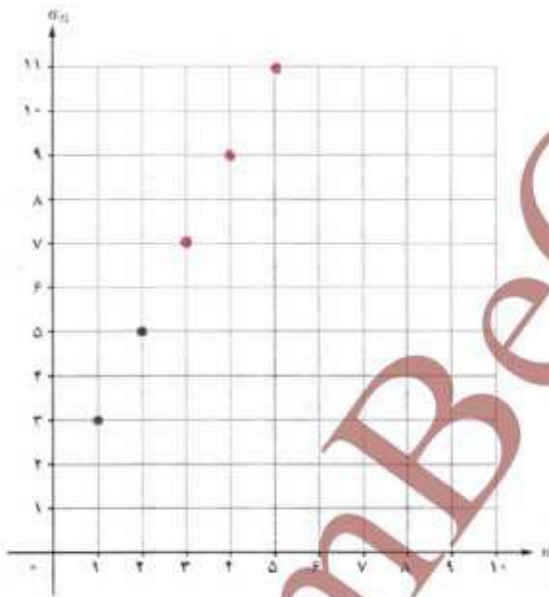
$$y = 2x + 1$$

معادله خط

ج) نسبت خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

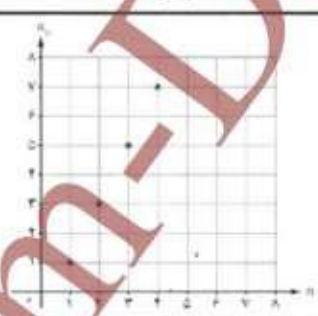
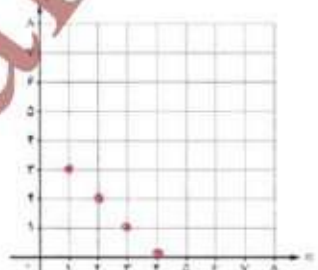
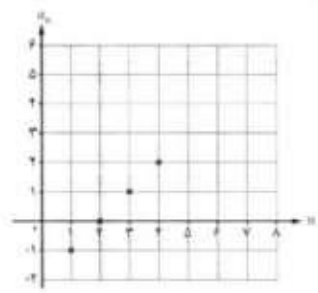
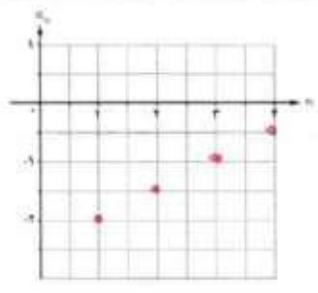
$$d = m = 2$$

مساویند.



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهیم داشت. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که نسبت خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

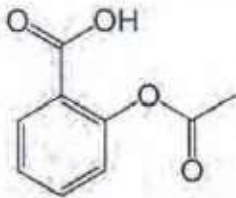
جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	۱، ۳، ۵، ۷	
$y = -x + 2$	$a_n = -n + 2$	۳، ۲، ۱، ۰، -۱	
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	-۱، ۰، ۱، ۲، ...	
$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$	$a_n = \frac{1}{4}n - \frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	

خط
 $y = mx + h$
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عرض از مبدأ
 $h = y_1 - mx_1$

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونتش کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳ میلی‌گرم می‌شود؟
ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳ میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲۶۰۰۰،۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)
با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی بی‌پایه می‌گردد. برای:



بنابراین، اگر a_n میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر یا مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه

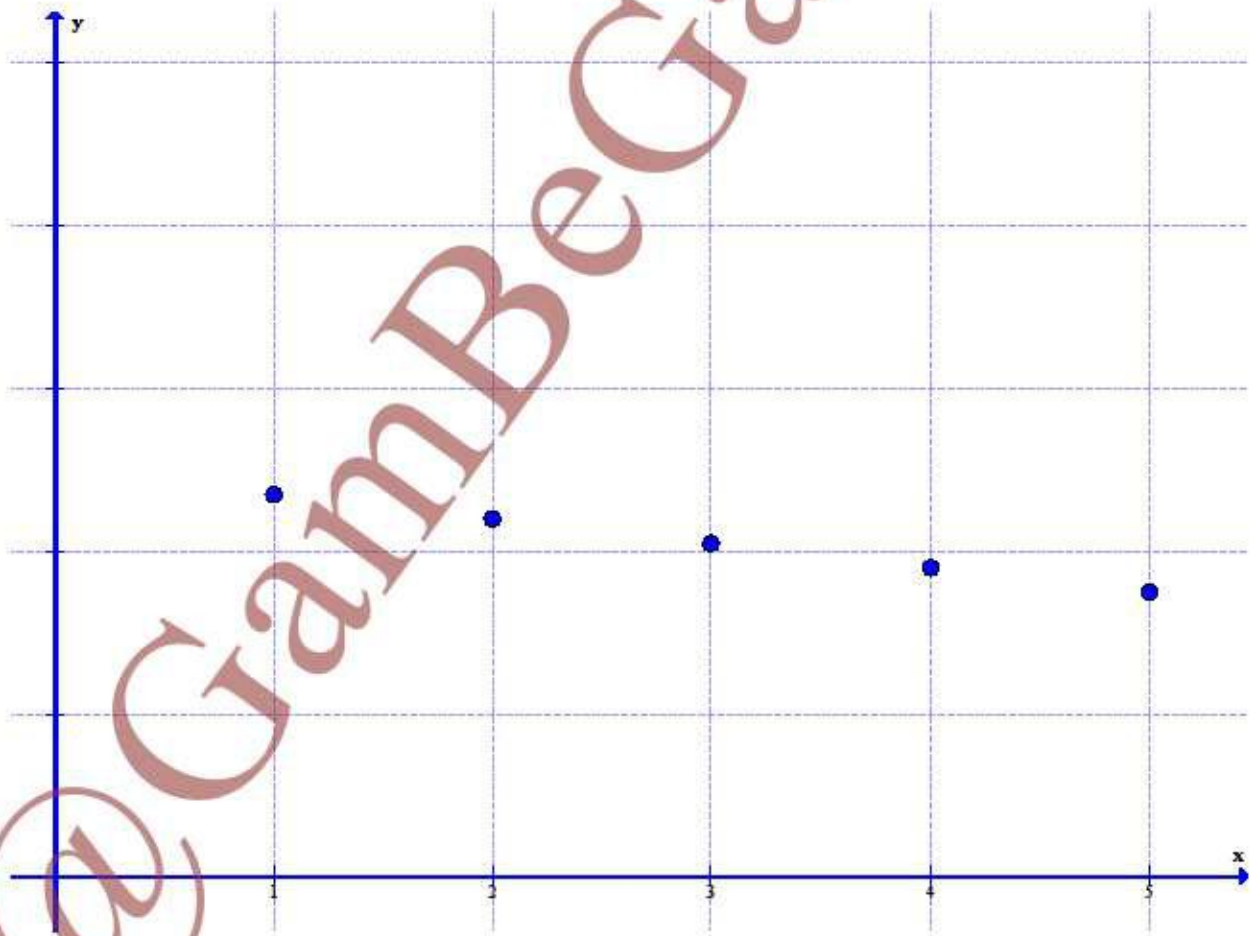
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

باید باشد

۸. این داروها را در بازوئیناسی Zero Order Kinetics می‌نامند.

a a a ...

a_n n a_n n a_n n



n								
b_m								
m								

b b b \dots m m m m /
 b_n m b_m m m m m /
/ /

				n
				n

a_n n a_n n n

مجموع n جمله اول یک دنباله عددی

در فعالیت «محاسبه تعداد جاهای قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ جاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, 2/5, 3/5, \dots, 29/5, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مفتی در هر روز بتواند ۲ متر جاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مفتی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع جاه‌های گفته شده را حفر کند. (الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ جاه حفر شده چند متر است. برای این کار، مجموع عمق جاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمیق‌ترین جاه و بار دیگر از کم عمیق‌ترین تا عمیق‌ترین جاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

(ب) با توجه به اینکه مفتی روزانه ۲ متر جاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/5 = 91 \text{ روز}$$

بنابراین، مفتی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۹۱ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم.

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \& \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع جاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

$d=5$
 a_1, a_2, \dots, a_n
 ۱۹۹ و ۹ و ۴ و ۱- (الف)

مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.
 $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $199 = -1 + (n-1)(5) \rightarrow 200 = 5n - 5 \rightarrow 205 = 5n \rightarrow n = 41$
 $S_{41} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 8309$

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = -2, S_n = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)
 $-2, 3, 8, 13, 18, \dots, n=10$
 $d=5$
 $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
 $S_{10} = \frac{10}{2}(2(-2) + (10-1)(5)) = 5(-4 + 45) = 205$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$a_1 = 1, a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n-1$
 $S_{30} = 2(30) - 1 = 59$

$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(1 + 59) = 900$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

$15, 18, 21, \dots$
 $S_n = 870, d=3, a_1=15$
 $n=?$
 $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
 $870 = \frac{n}{2}(2(15) + (n-1)3)$
 $1740 = \frac{n}{2}(30 + 3n - 3)$
 $1740 = \frac{n}{2}(27 + 3n)$
 $1740 = \frac{n}{2}(3n + 27)$
 $3480 = n(3n + 27)$
 $3480 = 3n^2 + 27n$
 $n^2 + 9n - 1160 = 0 \rightarrow (n-20)(n+29) = 0$
 $n = 20$
 $n = -29$

با جای گذاری $d=3, a_1=15$ در رابطه بالا $n=20$ به دست می‌آید.

$n^2 + 9n - 1160 = 0 \rightarrow (n-20)(n+29) = 0$
 $n = 20$
 $n = -29$

چون n باید عدد طبیعی باشد،

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

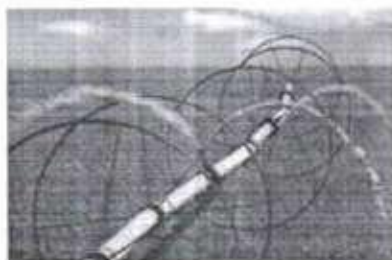
ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک جرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین جرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر جرخ تا جرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ جرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین جرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین ۱۸۲۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b عدد $\frac{m}{n}$ را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{\frac{m}{n}+1}$ به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۷. بر اساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

الف) ۱ و ۲۰۱ و ۹ و ۵ و ۱

ب) ۱۳ و $.....$ و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹



۹. باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

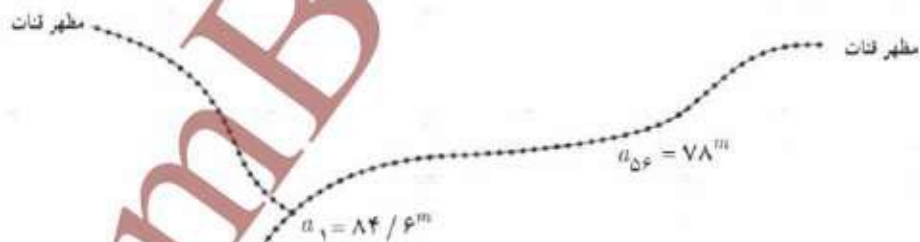
۱۰. ارزش امروزی قنات زارج، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادرچاه قنات زارج ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفرشده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفرشده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارج در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارج چقدر است؟ (براهتمایی: « a » را عمق چاه « m » تا کانال قنات و « a_1 » را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر ۲۹۸۵۸/۴ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) ۲۲.۳۵۱.۵۰۰.۰۰۰ تومان

د) ۴۷.۲۰۱.۵۰۰.۰۰۰ تومان

n	a a
n	a a
n	a a
n	a a
n	a a

a k

k k k k k k

k

a_n a $(n -)d$ $(n -)()$ n

n n n n n

a_n a $(n -)d$ a a a a d a d
 a a d a d

$(a - d)$ $(a - d)$ d d
 $a - d$ d a a

a_n a $(n -)d$ a $()()$

a	a	a		a

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

a

a

a

a

d a

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$$

b

a

m

a b

n m

a

a

a_n

a

b

a

$(a$

$(n$

$)d)$

a

b

a

a_n

b

$(n-1)d$

b

a

d

$\frac{b-a}{n}$

n

m

d

$\frac{b-a}{(m-1)}$

$\frac{b-a}{m}$

$\frac{b-a}{m}$

$$d = \frac{b-a}{m} \quad d = \frac{b-a}{m}$$

$$b a (n) d$$

$$a \quad b$$

$$n \frac{b a}{d}$$

$$n \frac{b a}{d} \text{ ———}$$

$$S \frac{n}{2}(a + b) \text{ —()}$$

$$n \frac{b a}{d} \text{ ———}$$

$$S \frac{n}{2}(a + b) \text{ —()}$$

$$n \frac{b a}{d} \text{ ———}$$

$$S \frac{n}{2}(a + b) \text{ —()}$$

/



@GamBe Gam Darsi

موسسه تخصصی زبان خوارزمی

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

درس ۱ دنباله هندسی

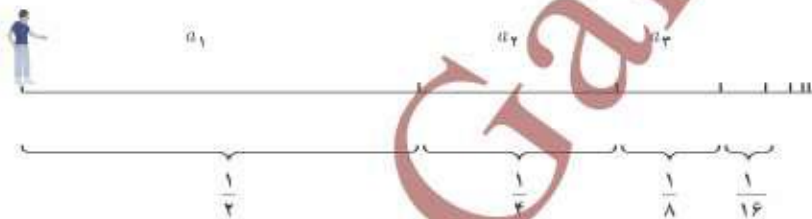
درس ۲ توان های گویا

درس ۳ تابع نمایی

توابع نمایی در مدل سازی بسیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیواکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، بیماری های واگیردار، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارد.

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟ این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنون^۲، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسافت باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هرکدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود. به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ و نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله \dots و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{2}$ و t هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد ساختاری به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

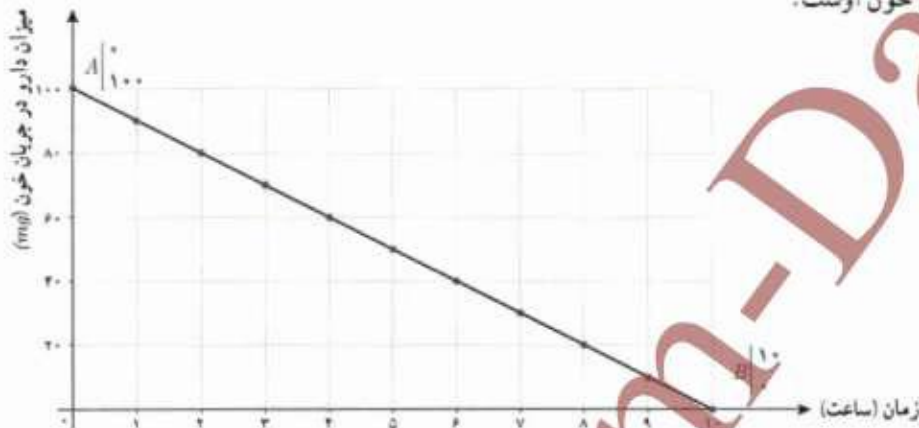
۱. Geometric Sequence

۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برنکور، نیوتن و اویلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایج دقیق برای حل این مسائل یافتند.

فعالیت

همان‌طور که در فعالیت صفحه ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی‌گرم از داروی A، در هر ساعت ۱۰ میلی‌گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش ۱۰ میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت:

$$a_1 = 90 \quad a_{n+1} = a_n - 10$$

پس، برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

$$m_{AB} = \frac{0 - 100}{9 - 0} = -10$$

تهیه کننده:

$$h = 100 = \text{عرض از مبدأ} \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ضابطه تابعی دنباله را به کمک رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا:

$$a_1 = 90 \quad \Rightarrow a_n = 90 + (n-1)(-10) \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

$d = -10$: کاهش ثابت ۱۰ میلی‌گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو

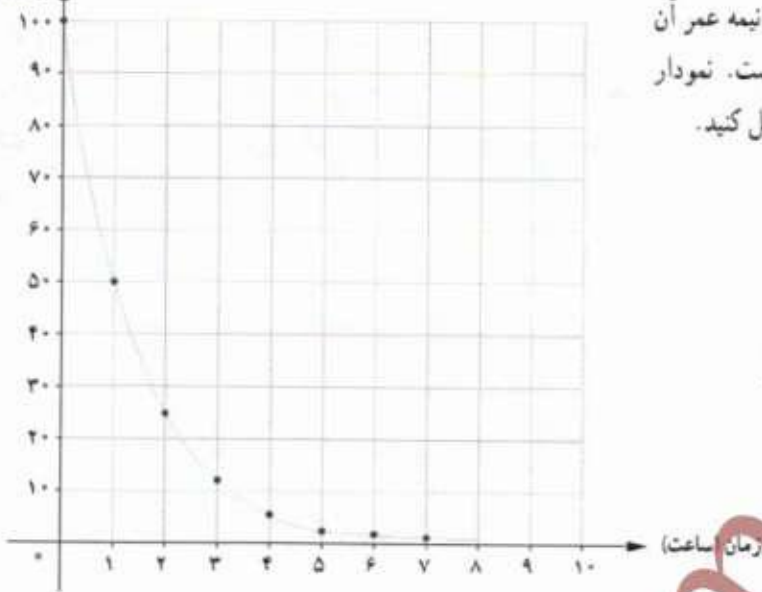
میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می‌یابد. فعالیت صفحه بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می‌کند.

۱- از این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲- نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{1/2}$ نشان می‌دهند.

فعالیت

میزان دارو در خون (mg)



شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» را کامل کنید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو

در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟ *پس از ۳ نیمه عمر - صفر - با افزایش زمان میزان دارو در بدن کم و کمتر می‌شود و به صفر می‌رسد. اما صفر نمی‌شود.*

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت \dots در جمله پیشین به دست می‌آید؛ یعنی:

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \dots \cdot a_n$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 \quad a_4 = \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 50$$

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

- در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

- در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه‌روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

- کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند

و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است.
 جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	رابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{81}\right)$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{4}$	$4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}\right) a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$

- | | | | |
|---------------------------------------|---|---|--|
| الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، | <input type="checkbox"/> افزایشی | <input checked="" type="checkbox"/> کاهشی | <input type="checkbox"/> ثابت |
| ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، | <input checked="" type="checkbox"/> افزایشی | <input type="checkbox"/> کاهشی | <input type="checkbox"/> ثابت |
| ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، | <input type="checkbox"/> افزایشی | <input type="checkbox"/> کاهشی | <input checked="" type="checkbox"/> ثابت |

۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-1} < 0.15 \Rightarrow 1 \times 0.15$	۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-5} < 0.15 \Rightarrow 0.6809 \times 0.15$
۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-2} < 0.15 \Rightarrow 0.81 \times 0.15$	۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-6} < 0.15 \Rightarrow 0.5907 \times 0.15$
۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-3} < 0.15 \Rightarrow 0.729 \times 0.15$	۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-7} < 0.15 \Rightarrow 0.4783 \times 0.15$
۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-4} < 0.15 \Rightarrow 0.676 \times 0.15$	۸	$\left(\frac{9}{10}\right)^{-8} < 0.15 \Rightarrow 0.4305 \times 0.15$

ادامه قسمت د

هشت سال پس از خرید $n > 7$

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی a, ar, ar^2, ar^3, \dots را مشخص کنید.

$$a_{n+1} = r a_n \quad a_1 = a$$

کار در کلاس

(هزینه استهلاک) - شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 960,000 \quad v_2 = 960,000 \times \frac{90}{100} = 864,000 \quad v_3 = 864,000 \times \frac{90}{100} = 777,600 \quad v_n = 960,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

ب) در ۲۰ - چند - برابر از زمان ماژور این که می آید کمترین ارزش را می توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟
 با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود.
 بنابراین ۲۰ - که می آید از زمان ماژور این که می آید بیشتر است.

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می شود؟ ضابطه v_n را به گونه ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حساسی است یا هندسی؟
 چون ما در هر عدد غیر منفی صفر نیستیم - میزان کاهش ثابت باشد - $a_n = 960,000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ - حساسی
 د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480,000$ را تأمین می کند، مشخص کنیم.)

ه) با توجه به قسمت های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

$$a_{n+1} = a_n - k \quad \text{کسر شود} \quad a_{n+1} = k a_n \quad \text{کسر شود}$$

۱. Depreciation Cost
 بیانگر دشوار است. بیانگر دنباله هندسی است.

زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود اما بیانگر
 که k درصد کسر شود. مقدار جملات کم و کمتر می شود اما هیچگاه صفر نمی شود.

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ جای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند جای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۵٪ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

$$r = \frac{1}{2} \quad a_n = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

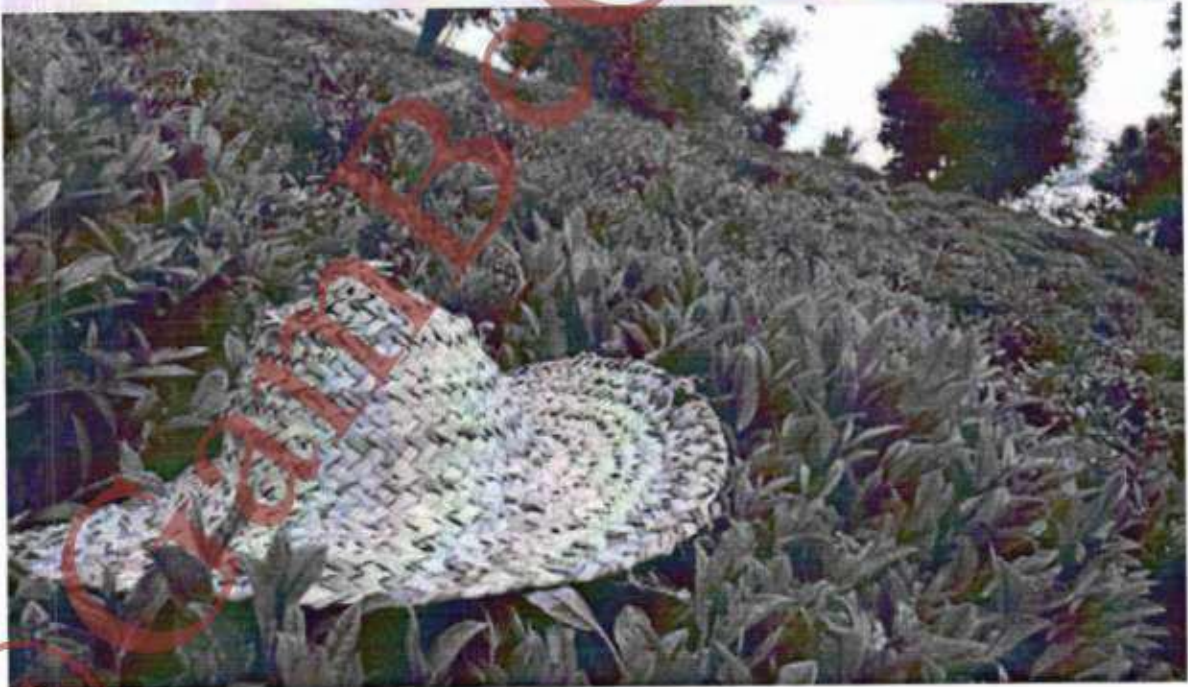
$$80 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{4}{80} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{20}$$

خواندنی برای بدست آوردن چند نیمه عمر می‌توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

امروزه جای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیه پزشکان به برهیز از نوشیدن جای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست.

توجه به نیمه عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



$$\frac{1.5}{2^n} > \frac{1.5}{2^4} \Rightarrow 2^{n-1} > 2^4 \Rightarrow 2^{n-1} > 16 \Rightarrow 2^{n-4} > 16$$

$$n-4 > 4 \Rightarrow n > 8$$

۹ نیمه عمر یا بیشتر
۵۴ = ۹ × ۶ ساعت یا بیشتر

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل 80 میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)

د) با جای گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر « S_n » میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض های مسئله :

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ پامداد	$S_1 = 80 \text{ mg}$
۲	۱۵ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	۱۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ پامداد	$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + 80 = 70 + 80 = 150$
۵	۱۶ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + 80 = 75 + 80 = 155$
۶	۱۶ بهمن	۱۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_6 = \frac{1}{2}S_5 + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می شود :

$$S_{n+1} = \dots + \frac{1}{2}S_n \quad S_1 = \dots$$

ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی بیوتیک هر قرص را A میلی گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب :

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{2}S_1 = \dots + \frac{A}{2}$$

$$S_3 = \dots + \frac{1}{2}S_2 = A + \frac{1}{2}(A + \frac{1}{2}A) = A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A$$

80

نویسه کننده:

گروه ریاضی منتخب دوم متوسطه، استان خوزستان

به همین صورت برای محاسبه S_n :

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضرب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n A \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - \left(\frac{1}{4}\right)^n A \Rightarrow \frac{3}{4}S_n = A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3}A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 160$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف:

$$S_n = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120$$

$$S_1 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120$$

$$S_2 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 160 \cdot \left(\frac{15}{16}\right) = 150$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم:

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{a - ra_n}{1-r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحه پیش:

$$a = 160 \quad r = \frac{1}{4}$$

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_n و S_n چیست؟

$$a_n = 160 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

۸۱

$$S_n = 160 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

a_n : میزان یا حتی مانده از هر قرص پس از ۲۴ ساعت مصرف n مین

S_n : میزان باقی مانده از قرص پس از ۲۴ ساعت از مصرف اولین قرص

$$* S_3 = \frac{r}{d} \left(\frac{1 - (\frac{r}{d})^n}{1 - \frac{r}{d}} \right) = \frac{r}{d} \times \frac{r}{1} \left(\frac{n-1}{n} \right) = \frac{r}{10}$$

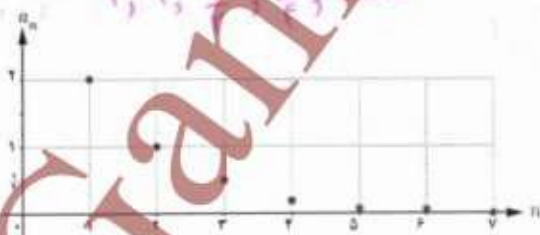
$$* S_9 = \frac{r}{d} \left(\frac{1 - (\frac{r}{d})^9}{1 - \frac{r}{d}} \right) = \frac{r}{d} \times \frac{r}{1} \times \frac{112-1}{112} = \frac{111}{420}$$

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2} (1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} \left(\frac{1024-1}{1024} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1023}{1024} \right) = \frac{1023}{4096}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{\frac{1}{4} (1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \left(\frac{256-1}{256} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \left(\frac{255}{256} \right) = \frac{255}{3072}$ $S_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^4}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \left(\frac{256-1}{256} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \left(\frac{255}{256} \right) = \frac{255}{3072}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_4 = \frac{\frac{2}{5} (1 - (\frac{1}{2})^4)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{1} \left(\frac{16-1}{16} \right) = \frac{4}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_4 = \frac{\frac{2}{5} (1 - 5^4)}{1 - 5} = \frac{2}{5} \times \frac{1 - 625}{-4} = \frac{2}{5} \times \frac{-624}{-4} = \frac{2}{5} \times 156 = 62.4$

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:
الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.
ب) حاصل S_4 را به دست آورید.

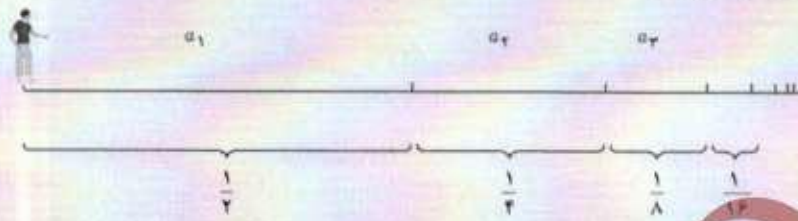


$$r = \frac{1}{2} \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$S_4 = \frac{2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^4}{1 - \frac{1}{2}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2 \times 2 \left(\frac{16-1}{16} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10.23}{10.24}$$

جواب تناقض (بارادوکس) زنو



همان طور که خوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می شود و می توانیم در حالتی که مجموع بی شمار جملات دنباله هندسی خواسته می شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

$$\text{رابطه } T = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \dots \text{ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک } \frac{1}{4} \text{ است:}$$

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$\frac{t(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}}$$

چون n تا بی نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{4})^n$ در بی نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{4})^n$ می توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{t(1-\cancel{(\frac{1}{4})^n})}{\frac{3}{4}} = \frac{t}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}t = 1.33t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می پنداشت اگر بی شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی شمار جمله باید بی نهایت شود.

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

⑤ a, b دنباله هندسی $\Rightarrow r^{n+2} \begin{cases} a_{n+2} = ar^{n+1} \\ a_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

- ۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ $a_1 = \frac{1}{2}$ ✓ ۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ $a_1 = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 ۳) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ $a_1 = 1$ ✓ ۴) $a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = 1$
 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ $1, 2, 4, 8, \dots$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)
 a, b, c $\Rightarrow r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.
 $x(x+3) = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 3x - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار 40% سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$

۵. میان دو عدد a و b عدد r را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۲ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۶) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \Rightarrow r^4 = \frac{242}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow a_7 = ar^6 = ar^2 \times r^4 = a_3 \times r^4 = 27 \times 9 = 243$

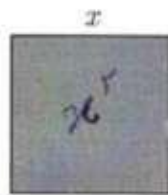
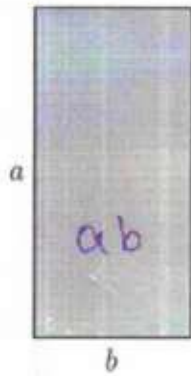
قسمت الف سوال ۴

$a_n = 10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow a_7 = 10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{6} = 16 \times 10^{12}$

n	$\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	n	$\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۱	$1 < 7 \times 10^{-6}$	۸	$0.0000016384 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۲	$0.4 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	۹	$0.00000065536 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۳	$0.16 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	۱۰	$0.000000262144 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۴	$0.064 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	۱۱	$0.0000001048576 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۵	$0.0256 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	۱۲	$0.00000004194304 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۶	$0.01024 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	۱۳	$0.000000016777216 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۷	$0.004096 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	۱۴	$0.00000000671088 < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$

بعد از ۱۴ بار

$$8) a_{21} = 15000 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{21-1} \Rightarrow a_5 = 15000 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{5-1} = 15000 \cdot \frac{52200625}{10000} = 783019375$$



7. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.

اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های

زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟
الف) x و b و a
ب) a و x و b ✓
پ) x و a و b

$x^2 = ab$
 x واسطه هندسی بین a و b است پس دنباله هندسی آن a, x, b باشد

8. یک شهاب سنگ 15 هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه 15% از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، جقدر از وزن آن باقی می ماند؟

9. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

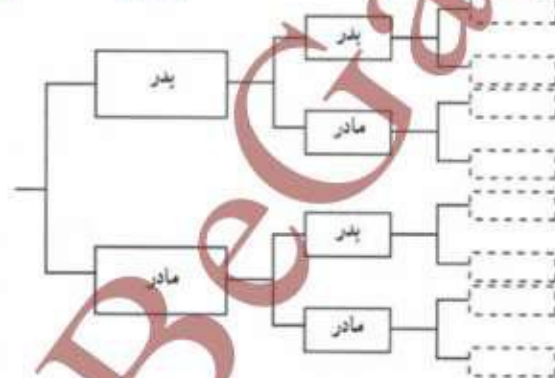
ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

$2, 4, 8, \dots$

$a_1 = 2 \quad r = 2$

الف) $a_n = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$



ب) $S_n = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2}$

$= -2 + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2$
 $= 2 \cdot 2^n - 2 = 2(2^n - 1)$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{1-r}$

$S_n = \frac{1 - 4 \times 4^9}{1-4} = \frac{1 - 4^{10}}{-3} = \frac{4^{10} - 1}{3} = 15341$

$a_1 = 1 \quad r = 4$

10. مجموع های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4 \cdot 16$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{64}$

$a_1 = \frac{1}{5}, \quad r = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{160} = \frac{51}{128}$

11. نخستین جمله یک دنباله هندسی 1524 و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله دنباله برابر 6 است؟ مجموع

جملات این دنباله از 1524 تا عدد 6 را به دست آورید. $n = ?$

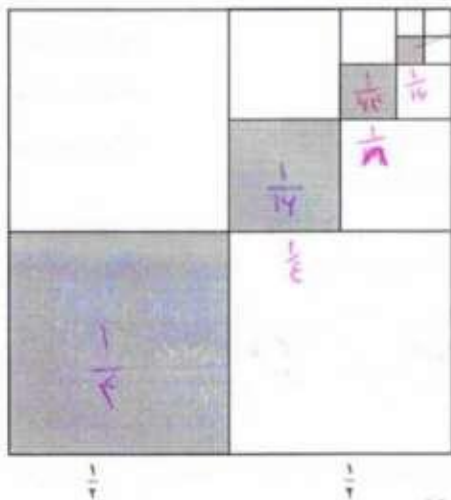
$a_1 = 1524 \quad r = \frac{1}{2} \quad a_n = 6 \quad n = ?$

الف) $a_n = 1524 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $6 = 1524 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{6}{1524} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{254} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} = 254$

$2^{n-1} = 254 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$

ب) $S_n = \frac{1524 - \frac{1}{2} \cdot 6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1524 - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{1521}{\frac{1}{2}} = 3042$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



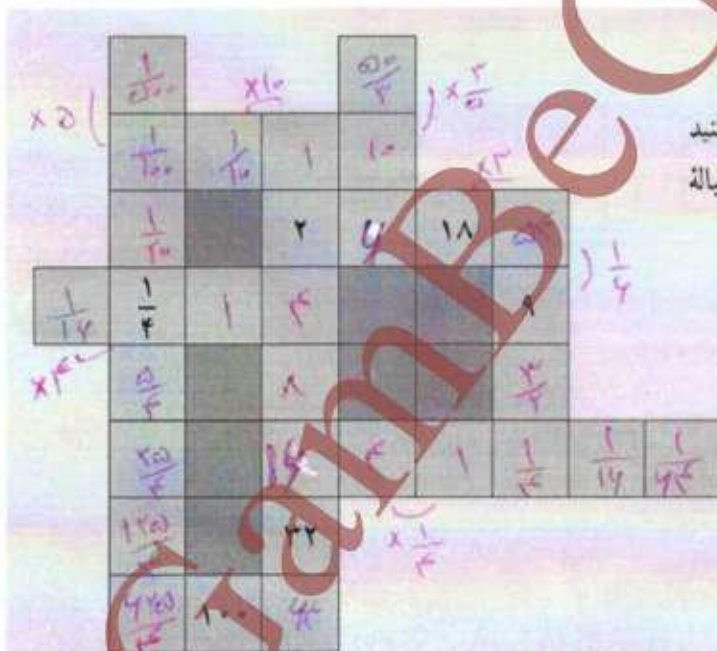
الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - (\frac{1}{4})}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^6}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \left(\frac{1 - \frac{1}{4096}}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{1345}{4096}$$



بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله هندسی تشکیل بدهد.

درس ۲

«ریشه nام و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوه ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4^2 = 16$$

$$(2)^{-7} = \frac{1}{128}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{14}{625}$$

$$7^3 = 343$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$-3^2 = -9$$

$$(0/0)^0 = (10^{-2})^0 = 10^{-10} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$$(-36)^7 + 9^7 = \left(\frac{-36}{9}\right)^7 = (-4)^7 \quad (2/1)^6 \times \left(\frac{21}{1}\right) \times \left(2\frac{1}{1}\right)^2 = (2/1)^{11}$$

$$(-4)^2 \times (-5)^2 =$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{5}\right)^8 = \left(\frac{4}{5}\right)^{5+8} = \left(\frac{4}{5}\right)^{13} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times (10^0)^8 = 10^8$$

$$(-4)^2 \times (-5)^2 = (-4 \times -5)^2 = 10^2$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

نهیہ کنندہ:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times (2/1)^3 \times (2/1)^2 = (2/1)^{11}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{6}{5})^5 \div (\frac{6}{5})^2 = (\frac{6}{5})^{5-2} = (\frac{6}{5})^3 = (\frac{6^3}{5^3})$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-4)^3 \times (-2)^3 = (-4 \times -2)^3 = (-8)^3$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-36)^3 \div 4^3 = (\frac{-36}{4})^3 = (-9)^3$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(10^4)^2 = 10^{4 \times 2} = 10^8$

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$9^5 \div 9^2 = 9^{5-2} = 9^3$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$7^4 \times 2^4 = (7 \times 2)^4 = 14^4$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$12^4 \div 3^4 = (\frac{12}{3})^4 = 4^4$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد 16 ریشه‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و چون $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ، پس 4 و -4 یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه‌های دوم عدد 16 هستند. همچنین، ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد 27 ، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر 3 می‌باشند. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -32 ، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر -2 و ریشه‌های ششم عدد 64 ، ریشه‌های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر 2 و -2 می‌باشند. جدول صفحه بعد را مانند نمونه کامل کنید.

نهیہ کنندہ:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

-۶۴	۶۴	عدد (a)
وجود ندارد	$\sqrt[4]{64}, -\sqrt[4]{64}$	ریشه های چهارم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[5]{-64}$	$\sqrt[5]{64}$	ریشه پنجم
$\sqrt[5]{-44}$	$\sqrt[5]{44}$	$\sqrt[n]{a}$
وجود ندارد	$\sqrt[4]{44} = 2, -\sqrt[4]{44} = -2$	ریشه های ششم
وجود ندارد	$\sqrt[4]{44} = 2$	$\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[3]{-44}$	$\sqrt[3]{44}$	ریشه های هفتم
$\sqrt[3]{-44}$	$\sqrt[3]{44}$	$\sqrt[n]{a}, \dots$

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم، هرگاه: $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

در حالت کلی تر، درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می توان گفت:

$a \geq 0$	n زوج باشد	ریشه n ام a = $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	ریشه n ام a = $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	ریشه n ام a = $\sqrt[n]{a}$

کار در کلاس

۱- با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال ها را می توانید به کمک ماشین حساب به دست آورید.

ریشه های چهارم عدد ۸۱ $\Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt[4]{81} = -3$

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}}$$

۱. با توجه به اینکه $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ و $\sqrt[n]{a^m} = |a|^{\frac{m}{n}}$ این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است: یعنی:

$$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} |a|^{\frac{m}{n}} & n \text{ زوج است} \\ a^{\frac{m}{n}} & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

$$\text{برای مثال: } \sqrt[3]{(-15)^3} = -15 = |15| = 15, \sqrt[5]{(-\frac{1}{3})^5} = -\frac{1}{3}, \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt[2]{(5)^2} = 5$$

توان های گویا

سهام داران یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را ارائه کنند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش بینی کرده که این سود در سال های آینده نیز محقق شود. اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام داران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند:

$$\text{مبلغ (بر حسب سال)} \rightarrow \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)} = 100 \times (1/2)^t$$



توجه کننده:

گروه ریاضی سفلی دوم متوسطه، استان خوزستان

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$100 \times (1/2)^1 = 120 \text{ سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت یک سال}$$

$$100 \times (1/2)^2 = 144 \text{ سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت ۲ سال}$$

حال اگر سهام داران این شرکت می خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می توانستند این کار را انجام دهند؟
 $a_n = 100 \times (1/2)^{n/30}$ $a_n = 100 \times (1/2)^{n/30}$

تا اینجا شما با توان های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان های غیر صحیح همانند توان های گویا است. در ادامه، با مفهوم توان های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری ها کار می کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	—	۸
جرم (گرم)	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$	$2^7=128$	—	2^8

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود؟
 پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چیست؟
 محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می زنم که 2^2 گرم شود، اما مقدار 2^2 را نمی دانم چقدر می شود؛ چون تمام توان هایی که ما تاکنون یاد گرفته ایم، توان های صحیح بوده اند.
 پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود و او را با توان های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می شود.
 با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$. (زیرا a مثبت است). بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.
 حالا می خواهیم بدانیم آیا می توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.
 معادله $\sqrt{2} = 2^b$ را در نظر می گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^b \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\sqrt{2})^2 = (2^b)^2 \Rightarrow 2 = 2^{2b} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین، داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود. حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به دست آورید.

= پس از ۲۰ دقیقه ($\frac{1}{3}$ ساعت) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ = پس از ۱۰ دقیقه ($\frac{1}{6}$ ساعت)

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هر جا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

$$2^4 = 2^{2 \times 2} = (2^2)^2$$

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که:

دریافته‌تان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$5^{\frac{5}{4}} = 5^{5 \times \frac{1}{4}} = (5^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5^5}$$

و به طور کلی، داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

همچنین $a^{\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{a^m}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$6^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{6^4}$$

$$12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

$$(0.001)^{\frac{11}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{1000}\right)^{11}}$$

روابطی که در ابتدای درس درباره توان های صحیح اعداد یادآوری شد، در خصوص توان های گویا و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(m و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارات های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارات های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$$

$$\sqrt{25} = 5^{\frac{2}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2/7} = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{31}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{31}}$$

$$\sqrt{1} = 1^{\frac{2}{2}}$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$6 \text{ ماه } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ سال بعد} : 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 \times \sqrt{1/2}$$

$$200 \text{ روز بعد} : 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200}{360}} = 100 \times \sqrt[360]{\left(\frac{1}{2}\right)^{200}}$$

$$3 \text{ سال و } 6 \text{ ماه بعد} : 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3.5}{1}} = 100 \times \sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}$$

$$1 \text{ سال و } 2 \text{ ماه بعد} : 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1.2}{1}} = 100 \times \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

۱- در این کتاب، تمامی توان های اعداد، گویا هستند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{3 \times -\frac{1}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$100^{\frac{1}{2}} = (10^2)^{\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \frac{1}{2}} = 10^1 = 10$$

$$32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$$

۴. هر یک از عبارات های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{3}} = 14^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 = 2 \quad -4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4(10^3)^{\frac{1}{3}} = -4 \times 10 = -40$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3 \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$125^{\frac{1}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}} + (125)^{\frac{1}{3}} = 5 + 5 = 10 \quad 8^{\frac{1}{3}} \times (1/5)^{\frac{1}{3}} = (8 \times 1/5)^{\frac{1}{3}} = (8/5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1.6} = \sqrt[3]{1.6}$$

۵. دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^1} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{5}$ یا هر دو برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

۲. حاصل هر یک از عبارات های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (m, n اعداد حقیقی مثبت اند.)

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$$

$$5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 5^0 = 1$$

$$8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 14^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{14} \quad (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^{6 \times \frac{1}{2}} = 2^3 = 8$$

$$\left(\frac{3^2}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^1}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$\left(\frac{a^{-1}}{a^{-2}}\right)^{-3} = \left(\frac{a^{-1+2}}{1}\right)^{-3} = (a^1)^{-3} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$3^{-2/3} \times 3^{-1/3} = 3^{-2/3 - 1/3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{4}{3}} n^{\frac{2}{3}} \cdot m^1 n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{4}{3} + 1} n^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = m^{\frac{7}{3}} n^{\frac{13}{6}}$$

توجه کنید:

گروه ریاضی متعلق دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\left[\frac{a^{-1}}{a^{-2}}\right]^{-3} = (a^{-1+2})^{-3} = (a^1)^{-3} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{4}{3}} \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdot m^1 \cdot n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{4}{3} + 1} \cdot n^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = m^{\frac{7}{3}} \cdot n^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{(mn)^{13}}$$

$$(0.36)^4 \times (0.36)^2 \times (0.36)^{-4} = (0.36)^2 \Rightarrow (0.36)^{-2+x} = (0.36)^2 \Rightarrow -2+x=2 \Rightarrow x=4$$

۳. در هر یک از تساوی های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 8^x \times 9^5 = 8^5 \times 9^5 \Rightarrow 8^x = 8^5 \Rightarrow x=5$$

$$(0.36)^x \times (0.36)^2 \times (0.36)^{-4} = (0.36)^2$$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \quad \text{اشتباه چاپی}$$

$$\frac{x^5 \times 15^2}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^4 \Rightarrow \frac{x^5 \times 225}{3^8} = 5^4 \Rightarrow x^5 \times 225 \times 3^8 = 5^4 \times 3^8$$

جواب در پایین صفحه

۴. همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم V را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \times \frac{1}{3}} = r^1 = r$$

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$r = \left(\frac{3\left(\frac{32\pi}{3}\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32\pi}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 \times \frac{1}{3} = 2$$



تپه کننده:
گروه ریاضی مقطع نوبت متوسطه، استان خوزستان

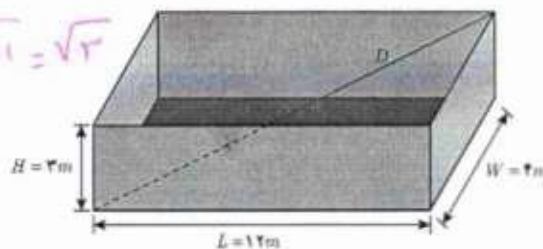
۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه) به دست می آید.

$$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1$ m باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$



$$۳) (3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است. یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی‌های سبز» است که قرار است دانش‌آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت‌کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده‌کننده محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز. در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟
برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$3^0 = 1$	۰
$3^1 = 3$	۱
$3^2 = 9$	۲
$3^3 = 27$	۳
$3^4 = 81$	۴
$3^5 = 243$	۵
$3^6 = 729$	۶
$3^7 = 2187$	۷
$3^8 = 6561$	۸
$3^9 = 19683$	۹
$3^{10} = 59049$	۱۰

(تعداد مراحل بازی) $\frac{\text{میزان امتیاز کسب شده}}{3}$

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟ **مرحله هفتم**

۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به دست آورید. **بله...**

۴. با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله n ام را به دست آورید؟

$$a_{10} = 3^{10} = 59049$$

$$a_n = 3^n$$

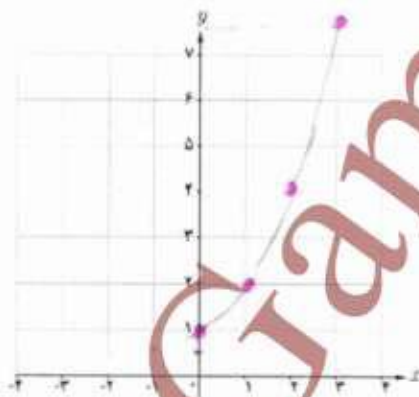
$$a_{20} = 3^{20} = 3486784401$$

فعالیت

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوریم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می‌کند. دوباره به این فعالیت بزمی گردیم!

۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...

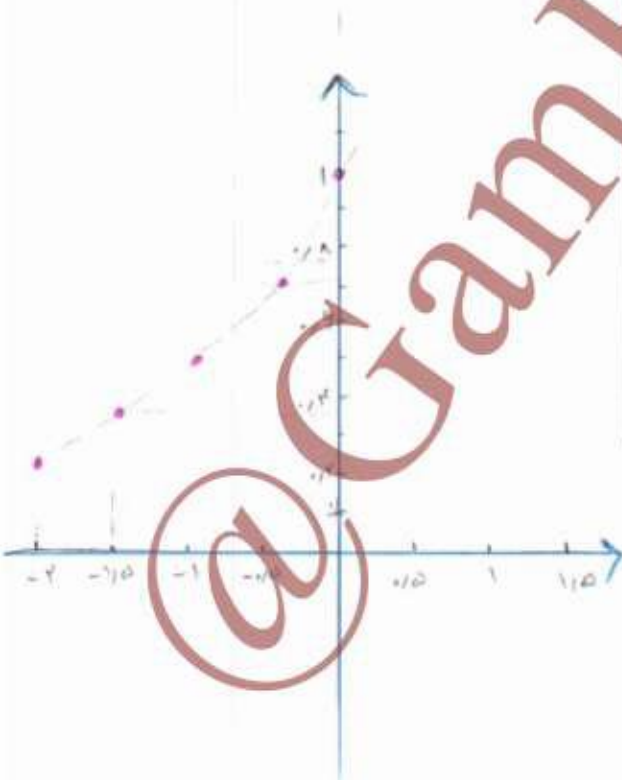


نویسندگان:

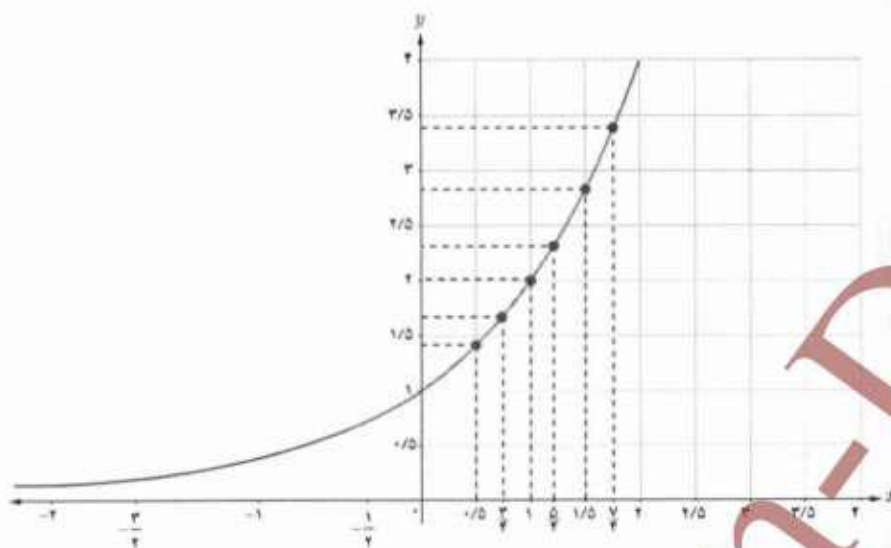
گروه ریاضی منطبق دوم متوسطه، استان خوزستان

۲. جدول زیر را با مانسین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	2^x
	1
$-\frac{1}{2}$	≈ 0.707
-1	≈ 0.500
$-\frac{3}{2}$	≈ 0.353
-2	≈ 0.250



۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی^۱ نامیده می‌شود.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

منظور از \mathbb{R}^+ ، مجموعه $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

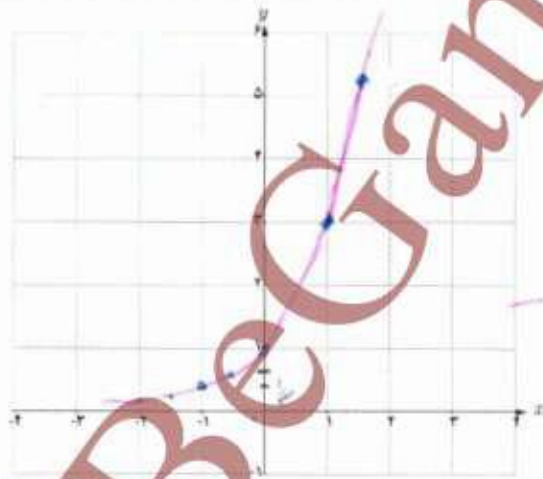
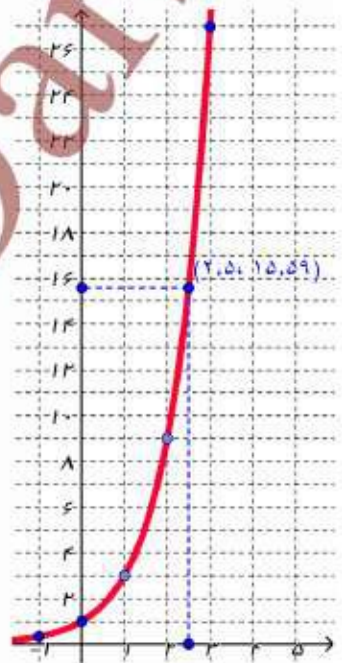
فعالیت

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

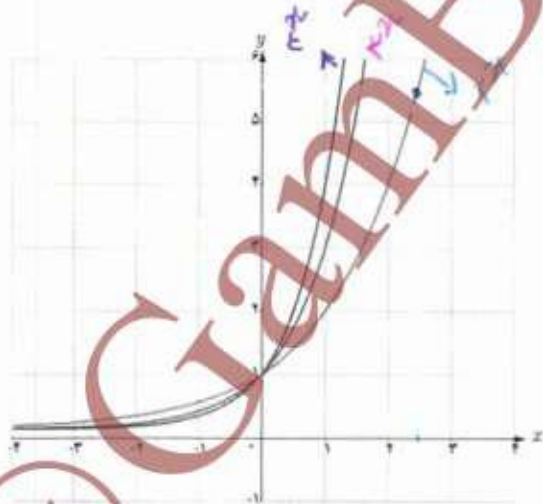
۱- این تابع به این علت نمایی نامیده می‌شود که متغیر x در نما یا توان قرار دارد.

جدول ۲

x	3^x	y	محاسبه y با استفاده از ماشین حساب تا سه رقم اعشار
-۲	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{3}{2}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-۱	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{1}{2}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	3^0	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	3^1	۳	۳
$\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	3^2	۹	۹



بیشتر بود
خط محور
دات به سمت ب
حداقل محور را با بیشتر باشد.



همان گونه که دیده می شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور y را قطع می کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد 3^2 را به دست آورید.

ب) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت

شباهت

- ۱- هر سه نمودار y ما را نقطه (اره) قطع می کنند
- ۲- هر سه تابع صعودی هستند.
- ۳- با محور طول ما برخورد می کنند

در طول $n=1$ y ها یکسان هستند

میزان افزایش مقدار عرضهایشان با هم متفاوت است

فعالیت

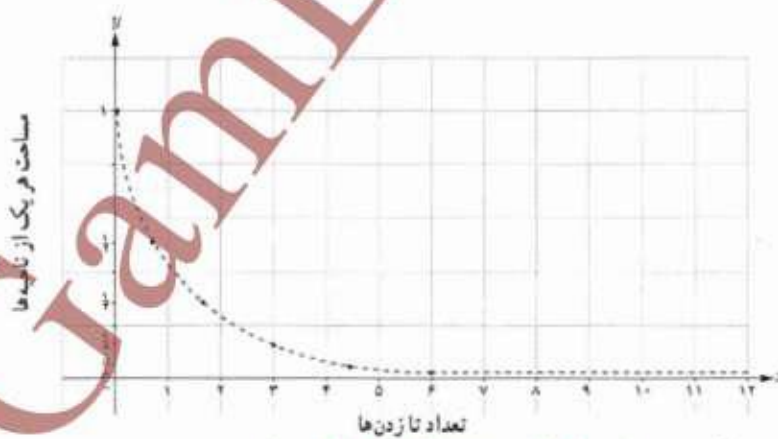
یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه هایی که بر اثر تا زدن های متوالی ایجاد می شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

تعداد تا زدن ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16}$
...	...
۸	$\frac{1}{256}$
...	...
...	$\frac{1}{1024}$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می توانید پیشنهاد دهید؟ در نمودار زیر، رابطه تعداد تا زدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟ $y = 10^{-10}$ قطع (۱۰ه)

۱. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از مانین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	محاسبه y با مانین حساب تا رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۴	۴
$-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[3]{8}$	۲٫۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	۲	۲
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$	۱٫۴۱۴
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰٫۷۰۷
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$	۰٫۵
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$	۰٫۳۵۳
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	۰٫۲۵

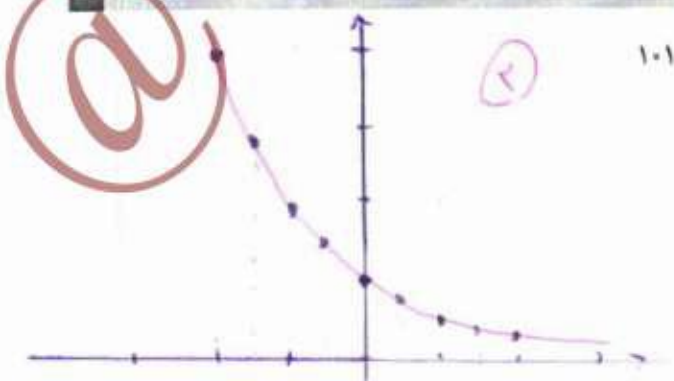
۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار،

مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟ **بله**

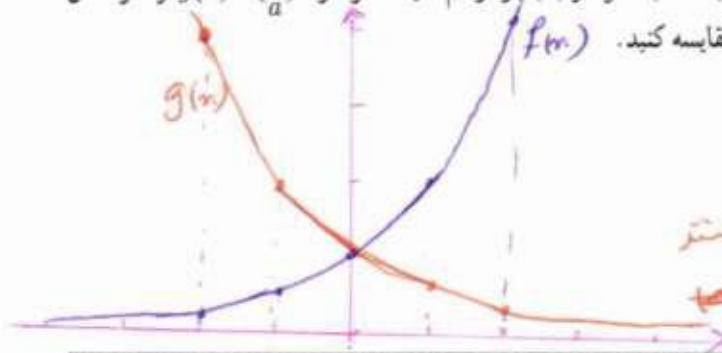
۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟ $y = 2^x$ یک تابع صعودی و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ یک تابع نزولی است.

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.



تابع نمایی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a > 1$ ، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.



$a = 2$

$f(x) = 2^x$

$g(x) = (\frac{1}{2})^x$

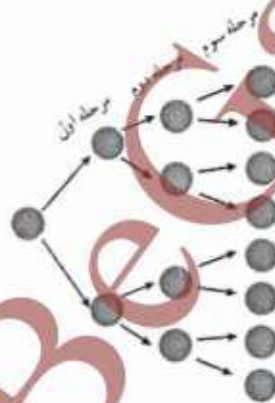
هر دو در نقطه (0, 1) با هم قطع می‌کنند
هر دو با محور y ها برخورد می‌کنند
دامنه هر دو \mathbb{R} است و بردار \mathbb{R}^+

تمرین

۱. در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

تپیه گنده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

(الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

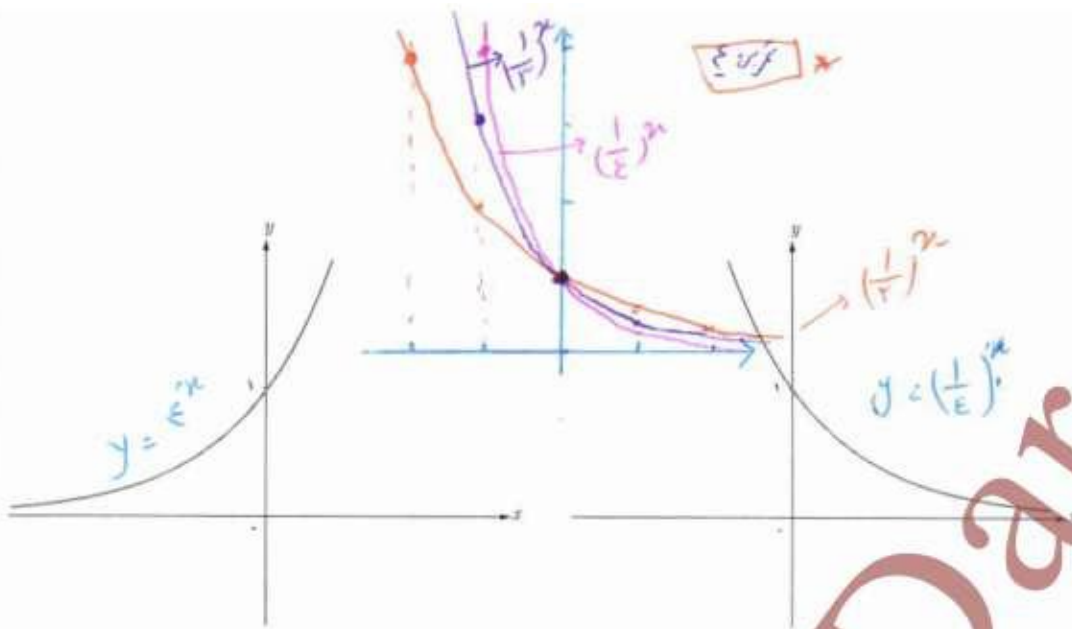
(ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

(پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

تعداد سلول ها = 2^n

۲. یک نمونه واقعی (نسبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع پیروی کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

هر سه محور را در نقطه (۰، ۱) قطع می‌کنند. هر سه نزولی هستند. هر سه محور را در نقطه (۰، ۱) قطع می‌کنند و دایره برابری R دارد.

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

اما میزان کاهش مقدار عرضهایشان با هم فرق دارد

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

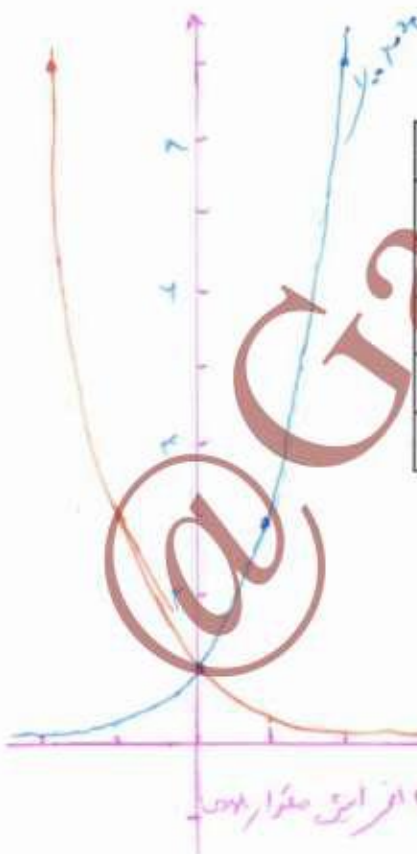
جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	$10,000,000 \times 1.14 = 11,400,000$
۱۹	$11,400,000 \times 1.14 = 12,994,000$
⋮	
۲۳	$10,000,000 \times (1.14)^4 = 14,949,222.22$

۱۰۳

هر دو نمودار محور را در نقطه (۰، ۱) قطع می‌کنند. هر دو با محور ها برخورد می‌کنند. در هر دو $R_0(0, 1) = R_1(1, 0)$ اما در یکی با افزایش x ها، مقدار y ها افزایش می‌یابد و در دیگری با افزایش x ها، مقدار y ها کاهش می‌یابد.



برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک سال بعد از سپرده گذاری در شرکت) را به دست آورید.

$$10,000,000 + \left(10,000,000 \times \frac{14}{100}\right) = 11,400,000$$

بنابراین، در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

در واقع، باید میزان مبلغ سپرده گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده گذاری شده را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه گذاری اولیه) به دست آوریم:

$$11,400,000 + \left(11,400,000 \times \frac{14}{100}\right) = 12,996,000$$

همان گونه که ملاحظه می کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می شود:

$$10,000,000 \times (1/14)^2 = 12,996,000$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه گذاری پس از t سال است، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(t) = 10,000,000 \times (1 + 0.14)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۲۵ سال، ۷ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۲۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

$$y = 5.2 \times (1 + 0.02)^{30} = 5.2 \times 1.81 = 9.412$$

تقریباً در هر ۲۵ سال دو برابر می شود

$$y = 5.2 \times (1 + 0.02)^{25} = 5.2 \times 1.69 = 8.788$$

زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می گوئیم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

$$y = 5.2 \times (1 - 0.02)^{10} = 5.2 \times 0.82 = 4.264$$

$$y = 5.2 \times (1 - 0.02)^{25} = 5.2 \times 0.61 = 3.172$$

مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یکم درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با جای گذاری $r=0$ و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40,000,000 (1 - 0.01)^{18} = 3,338,600$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها با موش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید. در صورتی که

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید. در صورتی که

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟ سال دهم به بعد $f(10) > g(10)$

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟ بین ۹ سال و ۱۰ سال

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟ هر چه سال ها زیادتر شود موش ها کم و گربه ها بیشتر می شوند.

$$① \quad y = 40,000,000 \times (1 + 0.01)^{10} = 40,000,000 \times 1.1047 = 44,188,000$$

نیمه کنده:

$$② \quad y = 10,000,000 \times (1 + 0.02)^{10} = 10,000,000 \times 1.219 = 12,190,000$$

گروه ریاضی ضلع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$③ \quad f(t) = 23576 (1 - 0.025)^t = 23576 (0.975)^t$$

$$g(t) = 15786 (1 + 0.018)^t = 15786 (1.018)^t$$



۱۰۵

$$④ \quad \begin{aligned} f(9) &> g(9) \\ f(10) &< g(10) \end{aligned}$$

بین ۹ سال و ۱۰ سال برابر می شوند.

پیاموز | Biamoz.com

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع

شامل انواع | نمونه سوالات | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |

ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

اینستاگرام

گروه تلگرام

کانال تلگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن کلیک کنید

دبستان

اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
-----	-----	-----	-------	------	-----

متوسطه اول

هفتم	هشتم	نهم
------	------	-----

متوسطه دوم

دهم	یازدهم	دوازدهم
-----	--------	---------