

### شمارش بدون تکرار

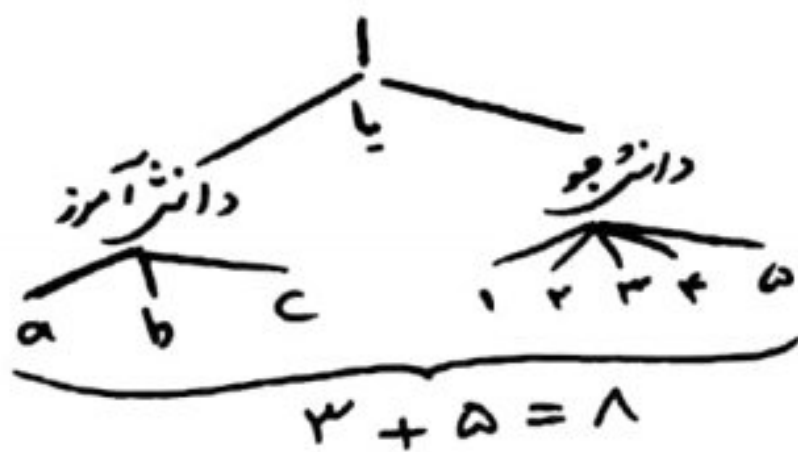
ترکیبیات: روش های شمارش را بررسی می کند و مبتنی بر دو اصل مهم زیر است:

#### ① اصل جمع

اگر عمل A به m روش و عمل B به n روش انجام پذیر باشد، در صورتی که دو عمل "مجزا یا ناسازگار" باشند، انجام عمل A یا B به  $m+n$  روش امکان پذیر است.

بیان دیگر: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام آن کار،  $m+n$  روش وجود دارد. (اصل جمع قابل تعمیم است)

مثال: می دانیم انتخاب یک دانش آموز از بین سه دانش آموز به ۳ روش و انتخاب یک دانشجو از بین پنج دانشجو به ۵ روش ممکن است. به چند طریق می توان یک دانش آموز یا یک دانشجو انتخاب کرد؟

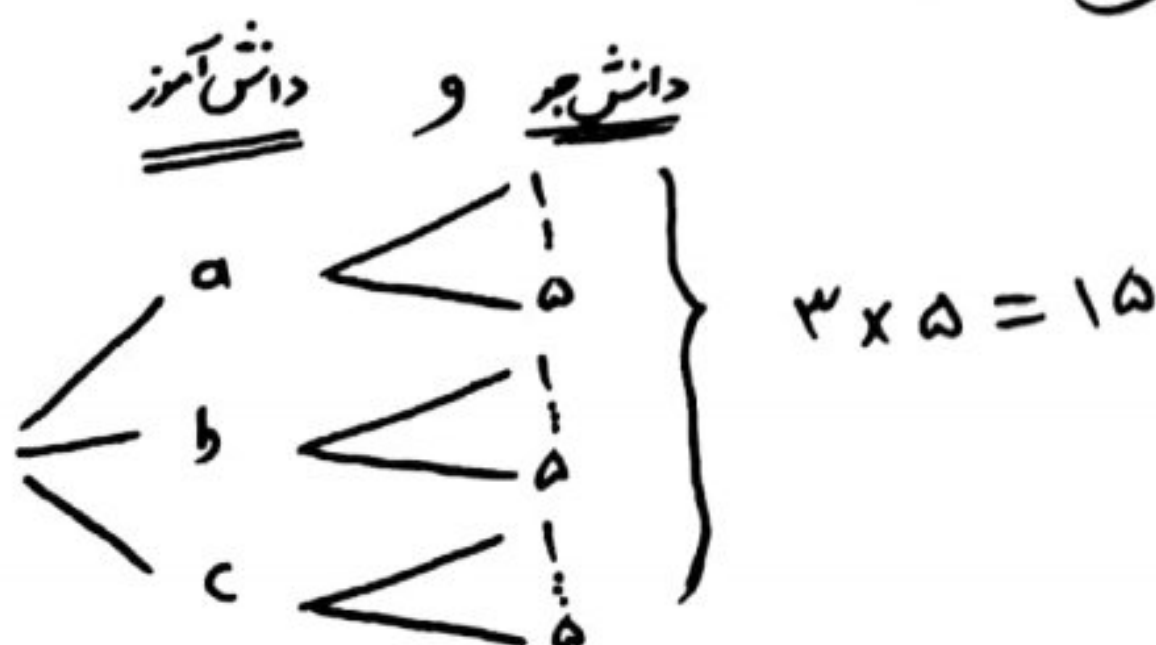


#### ② اصل ضرب

اگر عمل A به m روش و عمل B به n روش انجام پذیر باشد، در صورتی که دو عمل "مستقل" باشند، انجام عمل A و B به  $m.n$  روش امکان پذیر است.

بیان دیگر: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، کار مورد نظر با  $m.n$  روش قابل انجام است. (اصل ضرب قابل تعمیم است)

مثال: در مثال قبل به چند طریق می توان یک دانش آموز و یک دانشجو انتخاب کرد؟





مثال با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

صفر در مکان نهم نیست و تکرار میجاء نیست

صفر در مکان اول

$$\frac{0}{10^4} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^0} = 24$$

صفر در مکان دوم

$$\frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^0} = 36$$

→ 60 ✓

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

- ۹۹ (۱)
- ۹۴۸ (۲)
- ۹۵۲ (۳)
- ۹۶۸ (۴)
- ۹۷۲ (۵)

برابر باز کردن یک قفل رمز سه رقمی فرد که می دانیم رقم صفر در آن به کار نرفته است، در صورتی که امکان کردن هر روز ۲ دقیقه طول بکشد، حداقل چند ساعت وقت لازم است؟

۱۲ (۱) ۱۲،۵ (۲)

۱۳ (۳) ۱۳،۵ (۴)

$$\frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^1} + \frac{3}{10^0} = 405$$

کل حالات قفل

هر روز ۲ دقیقه → ۴۰۵ × ۲ = ۸۱۰ دقیقه

۱۳،۵ ساعت ✓

مثال چند عدد پنج رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن عددی زوج باشد؟ (تکرار مجاز است)

ایران ۲۲ ب ۵۳۶ ب ۱۲

چند بلاک اتومبیل به صورت متقابل می توان ساخت، به طوری که عدد دور رقمی

تکریم

سمت راست از مجموعه {۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹} و حرف به کار رفته از مجموعه {ا، ب، ج، د، ه، و، ز، ح، ط، ی، ک، خ، گ، ف، ع، ه، و، س، د، ج، ب}

انتخاب شود! (رقم صفر در بلاک اتومبیل به کار نرفته است)



مثال: به چند روش می‌توان با افراد یک کلاس ۸ نفری، یک صف ۷ نفری تشکیل داد؟

نتیجه: تعداد جایگشت‌های  $(n-1)$  تایی  $n$  شیء، با تعداد جایگشت‌های آن  $n$  شیء برابر است.

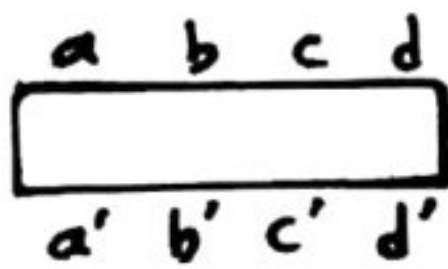
مثال EX پنج نفر به نام‌های  $a, b, c, d, e$  قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. به چند طریق ترتیب سخنرانی

این افراد ممکن است، هرگاه

الف) هیچ شرطی نباشد؟

ب)  $b$  بلافاصله بعد از  $a$  سخنرانی کند؟

پ) بین  $a$  و  $b$  فقط یک نفر دیگر سخنرانی کند؟



مثال EX به چند طریق می‌توان ۸ نفر را که دو به دو برادرند، در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل نشاند به طوری که هر کس متقابل برادر خود بنشیند؟

مثال EX جایگشت‌های با تکرار (جایگشت با اشیای تکراری)



مثال EX: با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، ۶، ۶ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

مثال EX: با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، ۶، ۶ چند عدد شش رقمی وجود دارد؟

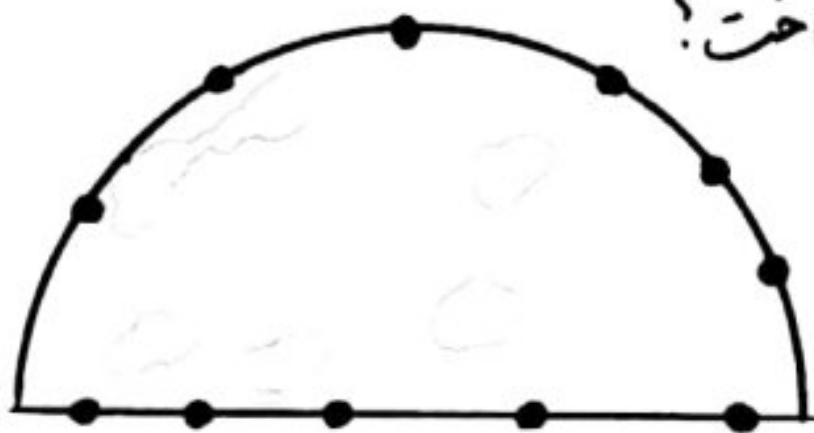
مثال EX: با حروف کلمه "ریاضی دانان" چند کلمه ده حرفی وجود دارد؟  
چند کلمه نه حرفی وجود دارد؟

قضیه جایگشت با تکرار EX اگر  $n$  شیء مفروض باشند به طوری که  $n_1$  تایی آنها از نوع اول و  $n_2$  تایی آنها از نوع دوم و  $n_3$  تایی آنها از نوع  $k$  ام و  $n_k$  تایی آنها از نوع  $k$  ام و  $n_k$  تایی آنها از نوع  $k$  ام باشند، آن‌گاه تعداد جایگشت‌های این  $n$  شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$



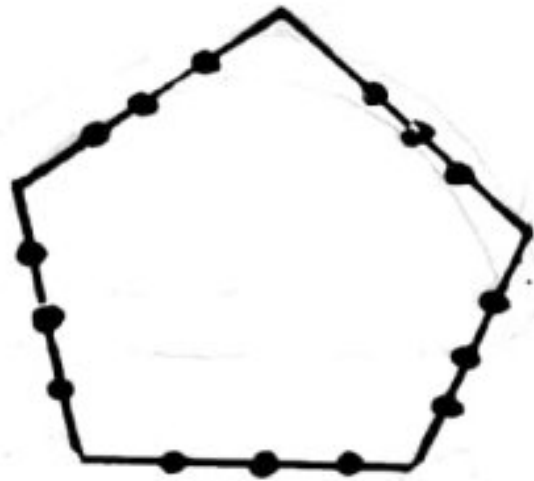
سوال: با ۱۱ نقطه متمایز که فقط پنج تا از آنها روی یک خط راست می‌باشند، چند مثلث می‌توان ساخت؟



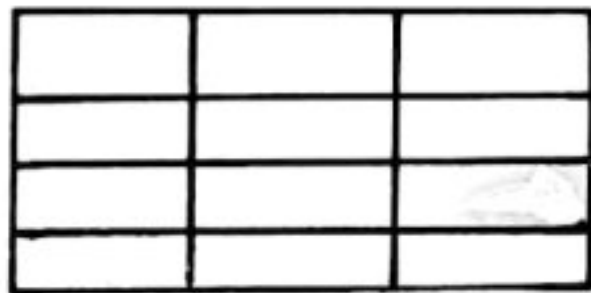
راه اول: ۳ نقطه از کمان یا ۲ نقطه از کمان و ۲ نقطه از خط یا ۲ نقطه از خط و ۱ نقطه از کمان

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{2} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{2} \times \binom{6}{1} = 155$$

راه دوم:



تمرین: با نقاط شکل مقابل چند مثلث وجود دارد؟ (جواب: ۴۵۰)



سوال: در شکل روبه‌رو چند مستطیل وجود دارد؟

سوال: اگر  $\binom{n}{10} = \binom{n}{11}$ ، آنگاه  $\binom{n}{19}$  کدام است؟

$\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \iff x + y = n$

نتیجه:  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

سوال: اگر  $\binom{n}{8} = 2 \binom{n}{7}$ ، آنگاه  $n$  کدام است؟

۲۱	۲	۲۰	۱
۲۳	۴	۲۲	۳

یادآوری:  $n! = n(n-1)!$

(تجزیه)

حل:  $\frac{n!}{\underbrace{\lambda! \times (n-\lambda)!}_{\lambda \times \nu!}} = 2 \times \frac{n!}{\underbrace{\nu! \times (n-\nu)!}_{(n-\nu) \cdot (n-\lambda)!}} \rightarrow \dots$

سوال: در یک آزمون ۱۰ سوالی به چند طریق می‌توان به ۶ سوال پاسخ داد به طوری که از پنج سوال اول فقط به ۳ سوال جواب داده شود؟

به اسرار: تعدادی را آنقدر می‌کنیم تا برای سوئین بار "و" بیاید. تعداد حالات که می‌توان در ۱۰ بار به کتاب یک سکه به این منظور رسید؟

۱۲۰	۲	۱۰۶
۳۶	۴	۲۵۴



