به نام آن که جان را فکرت آموخت

۱۴۰۰-۱۴۰۱

هندسه ۳

مبحث: ماتریس ، دترمینان

دستگاه های معادلات خطی

تنظیم: ترکمن

نمایش بسته (شکل فشرده)

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

که a_{ij} نمایندهٔ تمام درایه‌های ماتریس A می‌باشد و $\begin{cases} i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n\end{cases}$

مثال / Ex: اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ و $a_{ij}=i+j^2$ ، آن‌گاه A را به صورت گسترده نمایش دهید.

سطر اول $i=1 \longrightarrow$
- $j=1$: $a_{11}=1+1^2=2$
- $j=2$: $a_{12}=1+2^2=5$
- $j=3$: $a_{13}=1+3^2=10$

سطر دوم $i=2 \longrightarrow$
- $j=1$: $a_{21}=2+1^2=3$
- $j=2$: $a_{22}=2+2^2=6$
- $j=3$: $a_{23}=2+3^2=11$

$$\longrightarrow A=\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مثال / Ex: اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i+j & ; i>j\\ 7 & ; i=j\\ i^2 & ; i<j\end{cases}$ ، آن‌گاه A را به صورت جدول نمایش دهید.

$$A=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

تمرین / Ex. / H.W: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس A را به شکل فشرده نمایش دهید.

چند ویژگی

اگر A ، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه

1) $A+B=B+A$ (جابه‌جایی)

2) $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$ (شرکت‌پذیری)

3) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{0}$ (وجود عضو قرینه)

4) $A+\bar{0}=\bar{0}+A=A$ (وجود عضو خنثی)

5) $A+B=A+C \Rightarrow B=C$ (حذف‌پذیری)

6) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$ $\xrightarrow{\text{مثال}}$ $۲(۳A)=۳(۲A)=۶A$

Ex 7) $(r\pm s)A=rA\pm sA$ $\xrightarrow{\text{مثال}}$ $(۲+۳)A=۲A+۳A=۵A$

اثبات $(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]$

$=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]$

$=rA\pm sA$ ✓

Ex 8) $r(A\pm B)=rA\pm rB$ $\xrightarrow{\text{مثال}}$ $۵(A-B)=۵A-۵B$

اثبات $r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]$

$=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$

9) $rA=rB \overset{r\neq 0}{\Longleftrightarrow} A=B$

10) $rA=\bar{0} \Longleftrightarrow (r=0 \vee A=\bar{0})$

معرفی چند ماتریس مهم

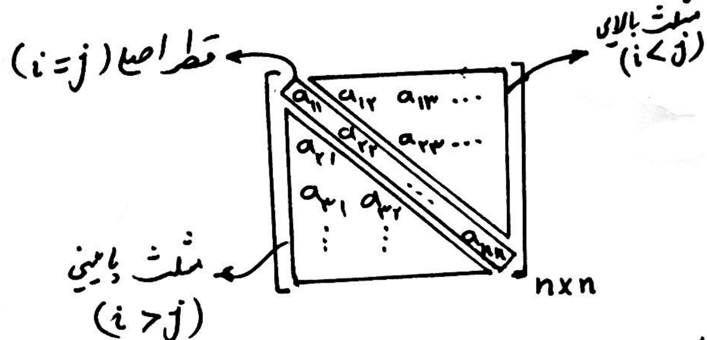
۱. ماتریس سطری: یک سطر و چند ستون دارد.
EX

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

۲. ماتریس ستونی: چند سطر و یک ستون دارد.
EX

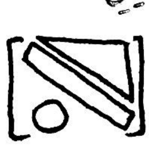
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

۳. ماتریس مربعی: تعداد سطرها و تعداد ستون ها برابر است.
EX



چند ماتریس مربعی خاص

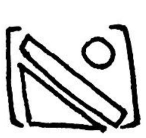
۱. ماتریس بالا مثلثی: تمام درایه‌های پایین قطر اصلی صفرند.



$$\xrightarrow{\text{مثال}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \xLeftrightarrow{\forall i>j} a_{ij}=0$$
بالا مثلثی است

۲. ماتریس پایین مثلثی: تمام درایه‌های بالای قطر اصلی صفرند.

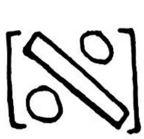


$$\xrightarrow{\text{مثال}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \xLeftrightarrow{\forall i<j} a_{ij}=0$$
پایین مثلثی است

۳. ماتریس قطری: فقط درایه های قطر اصلی مقدار دارند و سایر درایه ها صفرند.
EX

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \xLeftrightarrow{\forall i\neq j} a_{ij}=0$$
قطری است



$$\xrightarrow{\text{مثال}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◁ ماتریس اسکالر ← همان ماتریس قطری است که تمام درایه‌های قطر اصلی، اعدادی یکسانند.
EX

$$\begin{bmatrix} k & & O \\ & k & \\ O & & \ddots\, k \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

◁ ماتریس همانی (واحد) ← همان ماتریس اسکالر است که در آن $k=1$ می باشد.
EX

ماتریس همانی مرتبهٔ n ← $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & \ddots\, 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \xrightarrow{\text{مثال}} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(یعنی $n\times n$)

نتیجه:

تست اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB = 2BA$ ، آنگاه $(A+B)^2$ کدام است؟

۱) A^2+AB+B^2 ۲) $A^2+3AB+B^2$

۳) A^2+B^2+2AB ۴) $A^2+3BA+B^2$

نکته : اتحادهای جبری در مورد ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشند، مگر آن که ماتریس‌ها تعویض‌پذیر باشند.

توان n ام یک ماتریس قطری

$$\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ 0 & & \ddots \;\; c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & & 0 \\ & b^n & \\ 0 & & \ddots \;\; c^n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{I^n = I}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تذکر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & k \\ & k & \\ k & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{توان } n} \overset{\text{زوج}}{A^n} = \begin{bmatrix} k^n & & 0 \\ & k^n & \\ 0 & \ddots & k^n \end{bmatrix} \quad , \quad \overset{\text{فرد}}{A^n} = \begin{bmatrix} 0 & & k^n \\ & k^n & \\ k^n & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

شبه قطری (شبه اسکالر)

تست اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{100} - A^{99}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\bar{0}$

$$\overset{\text{زوج که}}{A^{100}} - \overset{\text{فرد که}}{A^{99}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$