



آمار سال دهم

برای شروع و درک بهتر از یک مثال استفاده می‌کنیم:
فرض کنید به شما مسئولیت داده‌شده که طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه رو به‌دست بیارید (این مدرسه ۱۰ کلاس ۵۰ نفره داره). در دل این مثال، مفاهیمی وجود داره که اون‌ها رو توضیح میدیم:

جامعه آماری

به کل افراد، اشیا یا موجودات زنده‌ای که اون‌ها رو از نظر موضوعی خاص، مورد مطالعه و بررسی قرار میدیم، جامعه آماری و به هریک از اعضای جامعه آماری یک واحد آماری گفته میشه. طبق تعریف گفته‌شده به کل دانش‌آموزان (افراد) این مدرسه که قراره در مورد طول قد اون‌ها (موضوعی خاص) مطالعه انجام بدیم جامعه آماری گفته میشه. همچنین تک‌تک دانش‌آموزان این مدرسه، یک واحد آماری محسوب میشن.

نکته: به تعداد اعضای یک جامعه، اندازه جامعه یا حجم جامعه نیز گفته میشه پس در مثال بالا حجم جامعه برابر ۵۰۰ است. گاهی اوقات لازمه که تمام اعضای یک جامعه آماری بررسی بشن که به این کار، می‌گیم سرشماری. در سرشماری، تمام اعضای جامعه آماری رو بررسی می‌کنیم که این کار دارای محدودیت‌هایی هم هست.

محدودیت‌های سرشماری

- ۱ هزینه زیاد
 - ۲ زمان بر بودن
 - ۳ خطای بیشتر در گردآوری داده‌ها
 - ۴ کم و زیاد شدن تعداد اعضا در طول مدت سرشماری (مثل مرگ‌ومیر یا زاد و ولد یا مهاجرت)
 - ۵ در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه
 - ۶ عدم امکان استفاده از سرشماری در بررسی‌های مخرب (مثلاً در کارخانه ماشین‌سازی برای سنجش باز شدن یا نشدن کیسه‌های هوا، خودرو را با سرعت به یک مانع سخت می‌کوبند، اما مسلماً همیشه تمام خودروها رو با این روش بررسی کرد چون دیگه خودرویی برای عرضه به بازار وجود نخواهد داشت.)
- تمام معایب فوق در سرشماری باعث میشه که ما تمام اعضای جامعه رو مورد بررسی قرار ندیم و تنها بخشی از جامعه آماری رو مورد مطالعه قرار بدیم (مگر اینکه تعداد اعضای جامعه زیاد نباشه و بررسی، مخرب نباشه)، با این کار میزان دقت و صحت آزمایش‌ها کمتر میشه اما از طرفی مشکلات زیادی که در سرشماری باهاشون درگیر بودیم از بین میرن، پس با مفاهیم جدیدی روبه‌رو هستیم که الان هر کدوم رو تعریف می‌کنیم.

نمونه و متغیر تصادفی

تا اینجا فهمیدیم که چون سرشماری دارای مشکلات زیادیه در اغلب موارد نمی‌تونیم از اون استفاده کنیم، پس باید از یک روش کارآمدتر به نام نمونه‌گیری استفاده کنیم. نمونه، زیرمجموعه کوچیک‌تری از جامعه آماریه که مطالعه و بررسی‌های مورد نیاز روی اون انجام میشه، نمونه‌گیری همون فرایند انتخاب یک زیرمجموعه از جامعه آماریه.

نکته: به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه گفته میشه. در مثال ابتدای درسنامه، فرض کنید بخوایم از هر کلاس ۱۰ نفر رو انتخاب کنیم و قدشون رو اندازه بگیریم، چون ۱۰ تا کلاس داشتیم؛ پس کلاً $10 \times 10 = 100$ نفر رو انتخاب می‌کنیم. قطعاً اندازه‌گیری قد ۱۰۰ نفر خیلی راحت‌تر از اندازه‌گیری قد ۵۰۰ نفره. الان این ۱۰۰ نفر که به‌صورت کاملاً تصادفی انتخاب شدن نمونه ما رو تشکیل میدن؛ پس اندازه نمونه ۱۰۰ می‌باشد. نمونه‌ای که قراره انتخاب بشه باید ویژگی‌هایی داشته باشه تا بتونیم اون رو به عنوان جانشینی مناسب برای جامعه آماری قبول کنیم. در واقع نمونه ما باید دارای ویژگی‌های خاصی باشه. ■

ویژگی‌های نمونه تصادفی

- ۱ اعضای نمونه باید به‌طور شانس و تصادفی از بین اعضای جامعه آماری انتخاب بشن، یعنی برای انتخاب اون‌ها نباید از هیچ الگو یا قانون محدود‌کننده استفاده بشه (به عبارتی نباید پارتی‌بازی بشه) یعنی همه اعضاء جامعه، باید شانس مساوی برای انتخاب شدن داشته باشن مثلاً آگه برای نظرسنجی در مورد موضوع خاصی با تلفن‌هایی که با ۲۲ شروع میشن تماس بگیریم قطعاً خیلی از خانه‌های مناطق دیگه شهر رو از دست خواهیم داد ولی مثلاً اگر خانه‌های با پلاک مضرب ۳ (یا هر مضرب دیگه‌ای) رو در کل شهر انتخاب کنیم، یک نمونه تصادفی خواهیم داشت.

۲. اگر انحراف (اختلاف) داده‌ها از میانگین برابر ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۳، -۳، -۵ باشند، مقدار واریانس چقدر است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۵/۵ (۳) ۶/۵ (۴)

در اینجا انحراف (اختلاف) داده‌ها از میانگین داده شده؛ یعنی در فرمول واریانس، مقدار پرانتزهای $(x_1 - \bar{x})$ و $(x_2 - \bar{x})$ و ... و $(x_n - \bar{x})$ به ما داده شدن، پس کافیست که هرکدام رو به توان ۲ رسانده و جواب‌هاشون رو با هم جمع کرده و بر تعداد تقسیم کنیم تا واریانس به دست بیاد:

$$\sigma^2 = \frac{(-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (2)^2}{7} = \frac{25 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

چند ویژگی کاربردی واریانس و انحراف معیار:

- ۱ واریانس و انحراف معیار، نمی‌تونن اعداد منفی باشن.
- ۲ اگر داده‌ها با هم مساوی باشن حاصل هر دوی σ و σ^2 برابر صفر میشن و برعکس؛ مثلاً واریانس داده‌های ۴، ۴، ۴، ۴ برابر با صفره.

تست نمونه: انحراف معیار داده‌های $m+2, \frac{z}{3}, 1, 5, t$ برابر صفر است، $m \times t \times z$ کدام است؟

- ۲۷۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۴۲۰ (۴)

انحراف معیار صفره، پس همه داده‌ها باید با هم مساوی باشن:

$$t-1=5 \Rightarrow t=6, \quad \frac{z}{3}=5 \Rightarrow z=15, \quad m+2=5 \Rightarrow m=3 \Rightarrow m \times t \times z = 3 \times 6 \times 15 = 270$$

اگر قیمت‌ها در دو بازار مختلف داده بشه بهتره از بازاری خرید کنیم که مقدار σ یا σ^2 در اون، کوچک‌تره، چون در این صورت قیمت‌ها به میانگین نزدیک‌ترن و بازار ثبات بیشتری داره. در مورد دقت عملکرد دو نفر در آزمایشگاه هم همین کار رو انجام میدیم، (یا وضعیت امتیازات دو ورزشکار) عملکرد فردی بهتره که واریانس و انحراف معیارش، کمتر باشه.

تست نمونه: نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است. دقت عملکرد کدام فرد بیشتر است؟

A: ۱۵، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹

B: ۱۶، ۱۴، ۱۷، ۱۴، ۱۷، ۱۸

B (۲)

A (۱)

(۴) غیرقابل مقایسه

(۳) یکسان

$$A: \begin{cases} \bar{x} = 16 \\ \sigma^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad B: \begin{cases} \bar{x} = 16 \\ \sigma^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

میانگین و واریانس هر دو گروه رو محاسبه می‌کنیم

(دیگه همتون محاسبات رو بلدین پس فقط جواب آخر رو می‌نویسیم):

در اینجور سؤالات، همیشه میانگین‌ها با هم مساوی هستن، الان σ^2 برای کارگر B کمتر شد پس دقت کارگر B بیشتره و گزینه «۲» درسته.

جمع و تفریق داده‌ها با یک عدد مثل k تأثیری روی σ و σ^2 نداره ولی اگر تمام داده‌ها در عدد k ضرب بشن واریانس در k^2 و انحراف معیار در $|k|$ ضرب میشه:

$$\sigma'^2 = k^2 \times \sigma^2, \quad \sigma' = |k| \times \sigma$$

واریانس جدید واریانس اولیه انحراف معیار جدید انحراف معیار اولیه

حواستون باشه: نماد σ' اینطور خونده میشه: «سیگما پریم». نماد σ'^2 اینطور خونده میشه: «سیگما پریم به توان ۲».

تست نمونه: واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۴ است واریانس داده‌های $\frac{-1}{4}x_1 + 3, \frac{-1}{4}x_2 + 3, \dots, \frac{-1}{4}x_n + 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳/۵ (۴)

جمع و تفریق داده‌ها با یک عدد ثابت، روی واریانس بی‌تأثیره، پس $(+3)$ ‌ها رو در نظر نمی‌گیریم. الان تمام داده‌ها در $\frac{-1}{4}$ ضرب شدن،

در واقع k همون $(\frac{-1}{4})$ هست: $\sigma'^2 = k^2 \times \sigma^2 = (\frac{-1}{4})^2 \times 4 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

چند ویژگی کاربردی IQR:

- ۱ اگر یک یا چند داده پرت داشته باشیم، برای بررسی پراکندگی داده‌ها حتماً باید از دامنه میان چارکی استفاده کنیم، یعنی در این مواقع نباید از انحراف معیار استفاده کنیم.
- ۲ اگر تمام داده‌ها در عدد k ضرب بشن، IQR هم در k ضرب میشه (کلاً همه جا هر وقت صحبت از عمل ضرب شد اون نکته برای تقسیم هم درسته چون تقسیم هم، در واقع نوعی عمل ضربه)، ولی جمع و تفریق داده‌ها با k تأثیری روی IQR نداره (تغییرات IQR شبیه تغییرات R است).

تست نمونه: اگر دامنه میان چارکی داده‌های a, b, c, d برابر ۱۲ باشد، دامنه میان چارکی داده‌های $\frac{a}{4} - 6, \frac{b}{4} - 6, \frac{c}{4} - 6, \frac{d}{4} - 6$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)

جمع و تفریق داده‌ها روی IQR تأثیری نداره، پس (-6) ‌ها حذف میشن. تمام داده‌ها بر عدد ۲ تقسیم شدن پس برای IQR هم همین اتفاق میفته:

$$(IQR)' = \frac{IQR}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

حواستون باشه: منظور از $(IQR)'$ دامنه میان چارکی داده‌های جدیده. ■

- ۳ قبلاً یادتونه که در ۲ گروه از داده‌ها هر چقدر انحراف معیار کمتر بود، پراکندگی هم کمتر بود (داده‌ها به میانگین نزدیک‌تر بودن) حالا هم می‌گیم در دو گروه از داده‌ها هر چقدر IQR عدد کوچک‌تری باشه پراکندگی داده‌ها کمتره و داده‌ها به میانه نزدیک‌ترن.

تست نمونه: در داده‌های دو گروه A و B باید از شاخص پراکندگی استفاده کنیم و ضمناً پراکندگی در داده‌های گروه A از گروه B است.

$A: 2, 3, 4, 7, 8, 12, 15, 2000$

$B: 3000, 3500, 4700, 4900, 5000, 9$

۱) انحراف معیار - بیشتر

۲) انحراف معیار - کمتر

۳) دامنه میان چارکی - بیشتر

۴) دامنه میان چارکی - کمتر

در هر دو گروه A و B با داده‌های دورافتاده مواجهیم؛ پس باید از شاخص پراکندگی دامنه میان چارکی استفاده کنیم. حالا مقدار این شاخص رو در دو گروه به دست میاریم:

$$A: 2, 3, 4, 7, 8, 12, 15, 2000 \Rightarrow IQR = Q_3 - Q_1 = 13/5 - 3/5 = 10$$

$$Q_1 = 3/5, Q_2 = 7/5, Q_3 = 13/5$$

$$B: 9, 3000, 3500, 4700, 4900, 5000, 9 \Rightarrow IQR = Q_3 - Q_1 = 4900 - 3000 = 1900$$

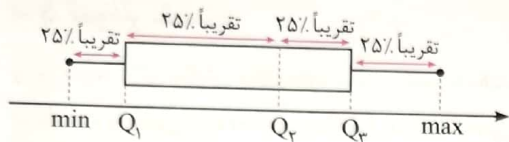
$$Q_1 = 3000, Q_2 = 4100, Q_3 = 4900$$

IQR در گروه A کمتره، پس پراکندگی در این گروه کمتر خواهد بود.

جدولی برای جمع‌بندی شاخص‌های مرکزی و پراکندگی

تغییرات در شاخص‌های مرکزی و پراکندگی رو در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم:

تغییرات در کل داده‌ها	شاخص‌ها	میانگین، میانه، مد	دامنه تغییرات	واریانس	انحراف معیار	دامنه میان چارکی
اگر تمام داده‌ها رو با k جمع کنیم.	k واحد زیاد میشن	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه
اگر از کل داده‌ها k واحد کم کنیم.	k واحد کم میشن	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه	تغییری نمی‌کنه
اگر کل داده‌ها رو در عدد k ضرب کنیم.	در k ضرب میشن	در k ضرب میشه	در k ضرب میشه	در k^2 ضرب میشه	در $ k $ ضرب میشه	در k ضرب میشه
اگر کل داده‌ها رو بر عدد k تقسیم کنیم.	بر k تقسیم میشن	بر k تقسیم میشه	بر k تقسیم میشه	بر k^2 تقسیم میشه	بر $ k $ تقسیم میشه	بر k تقسیم میشه



نحوه پخش داده‌ها در نمودار جعبه‌ای: نمودار جعبه‌ای، داده‌ها رو به ۴ قسمت تقسیم می‌کند که هر قسمت، شامل ۲۵ درصد داده‌هاست: با توجه به نمودار داده‌شده همیشه گفت:

۱. تقریباً ۵۰٪ داده‌ها بین Q_1 و Q_3 هستند. (داخل جعبه)
۲. تقریباً ۲۵٪ داده‌ها قبل از Q_1 هستند.
۳. تقریباً ۲۵٪ داده‌ها بعد از Q_3 هستند.
۴. تقریباً ۷۵٪ داده‌ها بعد از Q_1 هستند.
۵. تقریباً ۷۵٪ داده‌ها قبل از Q_3 هستند.

دست‌گرمی: در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۵, ۶, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۸, ۲۰, ۲۱ اختلاف دامنه تغییرات داده‌های داخل جعبه از میانه چقدر است؟

۵, ۶, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۸, ۲۰, ۲۱

$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6.5 \quad Q_2 = 10 \quad Q_3 = \frac{13+18}{2} = 15.5$$

پاسخ: چارک‌ها رو پیدا کرده و نمودار جعبه‌ای رو رسم می‌کنیم:

میانه همون چارک دوم (Q_2) هست، پس مقدار اون ۱۰ است.

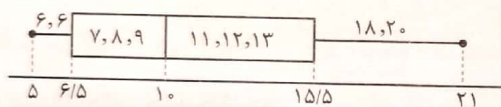
$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \Rightarrow R = \max - \min = 13 - 7 = 6$$

داده‌های داخل جعبه یعنی داده‌های بعد از Q_1 و قبل از Q_3 :

$$10 - 6 = 4$$

بنابراین اختلاف دامنه تغییرات داده‌های داخل جعبه از میانه برابر است با:

همون‌طور که مشاهده کردید خود مقادیر Q_1 و Q_3 جزء داخل جعبه نیستند، بلکه روی جعبه (لبه جعبه) قرار دارن.



تست نمونه: اگر در یک نمودار جعبه‌ای ۲۵ درصد داده‌ها از ۵۰ بزرگ‌تر و ۷۵ درصد داده‌ها از ۲۰ بزرگ‌تر باشند، IQR برابر کدام است؟

(داده‌های تکراری نداریم.)

۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۳) ۵۰

۲) ۴۰

۱) ۳۰

در نمودار جعبه‌ای ۲۵ درصد داده‌ها از چارک سوم بزرگ‌تر و ۷۵ درصد داده‌ها از چارک اول بزرگ‌تر هستند، بنابراین ۵۰ چارک سوم

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 50 - 20 = 30$$

و ۲۰ چارک اول است، در نتیجه دامنه میان چارکی برابر هست با:

☆ **تیپ مورد علاقه طراحان کنکور:** در این چند سال اخیر، طراحان چندین سؤال در مورد محاسبه یک شاخص مرکزی یا پراکندگی داده‌های داخل جعبه طرح

کرده‌اند. فقط دقت کنید اگر گفته شد داده‌های داخل جعبه یعنی داده‌های بعد از Q_1 و قبل از Q_3 ولی اگر گفته شد داده‌های داخل ورودی جعبه یعنی خود Q_1 و

داده‌های بعد از Q_1 و خود Q_3 و داده‌های قبل از Q_3 .

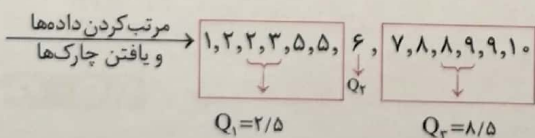
تست نمونه: برای داده‌های ۸, ۷, ۵, ۱۰, ۳, ۲, ۸, ۹, ۱, ۵, ۶, ۸, ۹, ۲ نمودار جعبه‌ای رسم کرده‌ایم. واریانس داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۴) $\frac{7}{3}$

۳) $\frac{3}{7}$

۲) $\frac{20}{7}$

۱) $\frac{7}{20}$



$$Q_1 = 2/5$$

$$Q_3 = 8/5$$

$$Q_1 \text{ بعد از } Q_3 \text{ و قبل از } Q_3 \Rightarrow 3, 5, 5, 6, 7, 8, 8 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{42}{7} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-6)^2 + 2(5-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + 2(8-6)^2}{7} = \frac{20}{7}$$

۲ شاخص تورم:

تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان تورم نامیده میشود. مقدار تورم معمولاً بر حسب درصد بیان میشود و طبق رابطه زیر به دست میآید:

$$\text{شاخص بهای کالاها و خدمات در سال پایه} - (\text{شاخص بهای کالاها و خدمات در سال مورد نظر}) = \text{نرخ تورم}$$

مهم خواستون باشه: شاخص بهای تمام کالاها و خدمات در سال پایه برابر ۱۰۰ می‌باشد.

دست‌گرمی: با توجه به اینکه در یک کشور فرضی میزان شاخص بهای مرغ و برنج ۱۴۰ است، نرخ تورم چقدر است؟

پاسخ: می‌دونیم تمام شاخص‌ها در سال پایه ۱۰۰ هستن پس داریم:

$$\text{نرخ تورم} = 140 - 100 = 40\%$$

تست نمونه: اگر نرخ تورم قیمت پوشاک بین سال‌های ۹۰ تا ۹۷ برابر ۷۰ باشد شاخص بهای پوشاک در سال ۹۷ چقدر است؟

۱۷۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۹۰ (۳) ۲۰۰ (۴)

طبق رابطه گفته‌شده داریم: (شاخص بهای پوشاک در سال ۹۷ رو x در نظر می‌گیریم)

$$70 = x - 100 \Rightarrow x = 170 \Rightarrow \text{شاخص پوشاک در سال } 97 = 170$$

نکته مهم: توجه کنید اگر تورم سال ۱ نسبت به سال ۲ خواسته بشه و سال ۲ پایه نباشه، باید از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\text{تورم} = \frac{\text{شاخص در سال } 2 - \text{شاخص در سال } 1}{\text{شاخص در سال } 1} \times 100$$

مثلاً اگر شاخص مسکن در سال ۱۴۰۰ برابر ۵۰۰ و در سال ۱۳۹۲ برابر ۲۰۰ بوده باشه، تورم در سال ۱۴۰۰ نسبت به سال ۱۳۹۲ برابر است با:

$$\text{نرخ تورم} = \frac{500 - 200}{200} \times 100 = \frac{300}{2} = 150\%$$

نحوه محاسبه شاخص قیمت کالاها و خدمات: برای به دست آوردن عدد شاخص مربوط یک به کالا یا یک خدمت، هزینه اون در سال جدید رو به هزینه‌اش در سال پایه تقسیم کرده در عدد ۱۰۰ ضرب می‌کنیم؛ مثلاً فرض کنید خانواده‌ای در سال ۹۸ برای پوشاک ۲۰ میلیون تومن و در سال ۹۰ (پایه) به مقدار ۵ میلیون تومن هزینه کرده باشه؛ پس داریم:

$$\text{شاخص پوشاک در سال } 98 = \frac{\text{کل هزینه پوشاک در سال } 98}{\text{کل هزینه پوشاک در سال پایه}} \times 100 = \frac{20}{5} \times 100 = 4 \times 100 = 400$$

تست نمونه: یک خانواده در سال ۹۹ به مقدار ۲۰ کیلوگرم برنج با قیمت هر کیلو ۲۴۰۰۰ تومان مصرف کرده است. اگر قیمت برنج در سال پایه ۸۰۰۰ تومان بوده باشه، شاخص برنج در سال ۹۹ کدام است؟ (مقدار مصرف برنج در سال پایه هم ۲۰ کیلوگرم است.)

۳۰۰ (۱) ۳۵۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۴۵۰ (۴)

$$\text{شاخص قیمت برنج در سال } 99 = \frac{\text{کل هزینه برنج در سال } 99}{\text{کل هزینه برنج در سال پایه}} \times 100 = \frac{20 \times 24000}{20 \times 8000} \times 100 = \frac{480000}{160000} \times 100 = 300$$

البته معمولاً در کنکور، شاخص بهای دو یا سه کالا به طور هم‌زمان خواسته میشود. روش حل، شبیه قسمت قبلی هست؛ مثلاً در مورد دو کالا طبق نکته زیر عمل می‌کنیم.

یہ راز مهم: شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی برای دو کالا روی هم، برابر است با:

$$100 \times \frac{(\text{مقدار مصرف کالای } y \text{ در سال } y) \times (\text{قیمت کالای } y \text{ در سال مورد نظر}) + (\text{مقدار مصرف کالای } x \text{ در سال } x) \times (\text{قیمت کالای } x \text{ در سال مورد نظر})}{(\text{مقدار مصرف کالای } y \text{ در سال } y) \times (\text{قیمت کالای } y \text{ در سال پایه}) + (\text{مقدار مصرف کالای } x \text{ در سال } x) \times (\text{قیمت کالای } x \text{ در سال پایه})}$$

البته حفظ فرمول طولانی بالا الزامی نیست. فقط باید بدونید که کل هزینه جدید پرداختی برای دو یا سه کالا رو بر کل هزینه پرداختی در سال پایه تقسیم کرده و در

۱۰۰ ضرب می‌کنیم.

$$100 \times \frac{\text{هزینه کل جدید}}{\text{هزینه کل اولیه (پایه)}} = \text{شاخص بهای یک یا چند کالا}$$