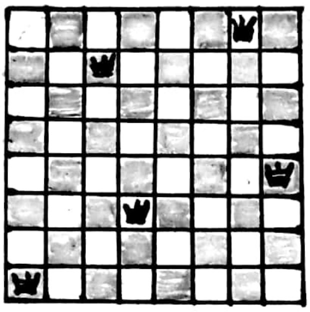
وزیرهای احاطه گر (شروع مبحث احاطه گری)



Ex **مسئله:** حداقل چند مهره وزیر لازم است که با چینش مناسب، تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند یا احاطه کنند؟
(یعنی هر خانه از صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است، حداقل توسط یک وزیر تهدید شده باشد.)

احاطه گری در گراف (مدلسازی) (Domination)

در هر گراف یافتن رأس (های) از مجموعهٔ رأس های گراف، که با تمام رأس های دیگر گراف مجاور باشند یا به عبارتی همه رأس ها را احاطه نمایند، احاطه گری در گراف نامیده می شود.

(به عنوان مثال برای نصب دستگاه عابربانک در یک محله، می خواهیم این دستگاه ها را طوری قرار دهیم که یا در هر تقاطع یک دستگاه وجود داشته باشد یا هر تقاطع فاقد دستگاه، با پیمودن یک خیابان به تقاطع شامل دستگاه دسترسی داشته باشد.)

مجموعه های احاطه گر در گراف

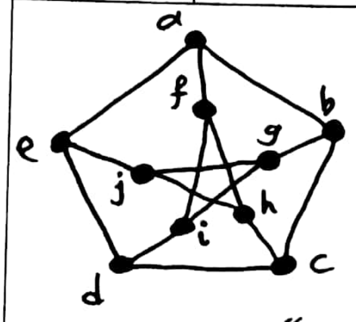
- **مجموعهٔ احاطه گر** ← زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رأس های گراف G را مجموعهٔ احاطه گر گراف G می نامیم، هرگاه هر رأس از گراف G، یا به مجموعهٔ D تعلق داشته باشد یا حداقل با یکی از رأس های متعلق به مجموعهٔ D مجاور (همسایه) باشد. *Ex*

پس
مجموعهٔ D یک مجموعهٔ احاطه گر برای گراف G است اگر و تنها اگر

$$D \subseteq V(G) \ \wedge \ (\forall v \in V(G) \ ; \ N_G[v] \cap D \neq \phi)$$

نتیجه: بزرگترین مجموعهٔ احاطه گر برای گراف G، مجموعهٔ $V(G)$ است.

مثال (EX) کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل مقابل احاطه‌گر می‌باشد؟

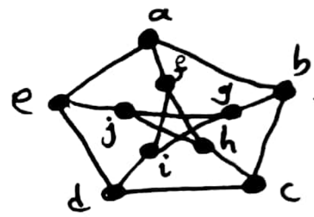


(گراف پترسن)

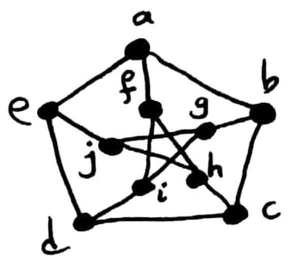
الف) $\{a, b, c, d, e\}$ ب) $\{f, g, h, i, j\}$

پ) $\{a, b, j, h, g\}$ ت) $\{a, i, h\}$

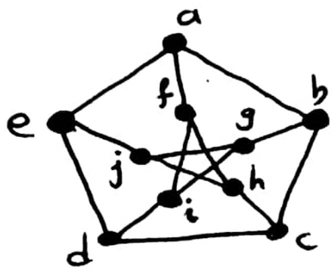
ث) $\{f, g, h, e, d\}$ ج) $\{f, g, h, e\}$



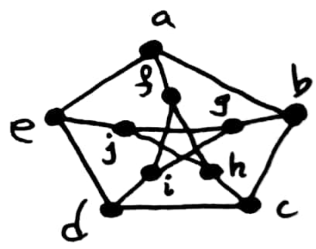
(الف)



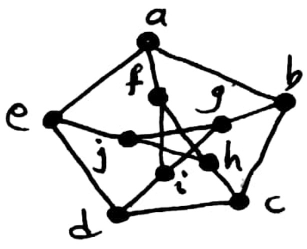
(ب)



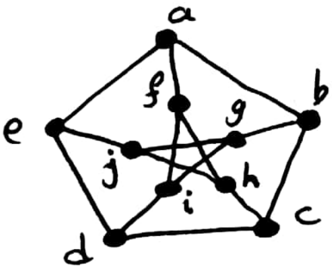
(پ)



(ت)



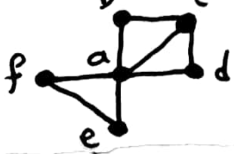
(ث)



(ج)

نتیجه: هر رأس گراف، مجموعهٔ همسایگی بستهٔ خود را احاطه می‌کند. بنابراین اگر در گراف G، $v \in V(G)$ باشد، آن‌گاه تعداد رأس‌هایی که توسط v احاطه می‌شوند، برابر است با

تست (N.W) گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر شامل رأس a دارد؟ (گزینه ۲)



۱) ۱۶ ۲) ۳۲

۳) ۸ ۴) ۱۰

نکاتی در مورد عدد احاطه‌گری گراف

① در گراف تهی، عدد احاطه‌گری با مرتبهٔ گراف برابر است. یعنی

② اگر در گراف G رأس فول وجود داشته باشد، آن‌گاه عدد احاطه‌گری برابر ۱ است و برعکس.
Ex

یعنی در گراف n رأسی G داریم: $\Delta(G)=n-1 \Longleftrightarrow \gamma(G)=1$

مثال:

نتیجه ۱: در هر گراف کامل، همواره عدد احاطه‌گری برابر ۱ است. یعنی

زیرا

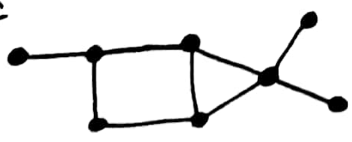
هشدار: عکس نتیجهٔ ۱ لزوماً درست نیست. یعنی اگر عدد احاطه‌گری یک گراف برابر ۱ باشد، لزوماً گرافِ مورد نظر، گراف کامل نیست و تنها می‌توان گفت گرافِ مورد نظر حداقل یک رأس فول دارد.

نتیجه ۲: گراف G از مرتبهٔ n با $\gamma(G)=1$، حداقل یال و حداکثر یال دارد.
Ex

③ اگر G یک گراف n رأسی و فاقد رأس تنها باشد، آن‌گاه، $\gamma(G) \le \frac{n}{2}$

(این نکته برای هر گراف همبند n رأسی نیز درست است)

مثال



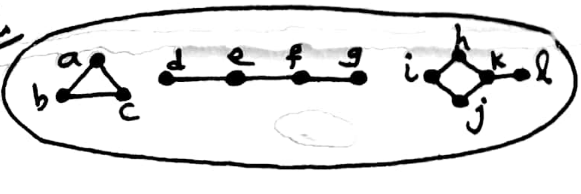
$\xrightarrow{n=8} \gamma(G)=$

④ اگر G یک گراف ناهمبند، متشکل از مؤلفه‌های $G_1, G_2, \dots, G_n$ باشد، آنگاه

$$\gamma(G)=\gamma(G_1)+\gamma(G_2)+\dots+\gamma(G_n)$$

مثال

G:



$\Longrightarrow \gamma(G)=$

⑤ Ex: در گراف G از مرتبهٔ n، همواره داریم:

$$\boxed{\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n-\Delta(G)}$$

اثبات: در هر گراف، رأس با درجهٔ Δ، می‌تواند Δ+1 رأس را احاطه نماید (خودش و Δ رأس مجاورش)

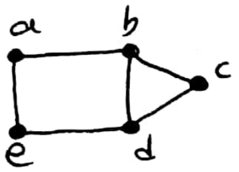
پس اگر فقط یک رأس با درجهٔ Δ وجود داشته باشد، آن‌گاه خودِ این رأس و n-(Δ+1) رأس دیگر که احاطه نشده‌اند، در مجموعهٔ احاطه‌گری نیم حضور دارند و لذا

$$\gamma(G) \leq (n-(\Delta+1))+1 \Rightarrow \gamma(G) \leq n-\Delta$$

و در حالتی که تمام رأس‌ها با درجهٔ Δ می‌باشند، پس تعداد رأس‌های مورد نیاز برای احاطهٔ کل رأس‌ها برابر با $\frac{n}{\Delta+1}$ است و چون عدد صحیح مورد نظر است، لذا $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$.

مثال: Ex عدد احاطه‌گری گراف‌های زیر را بیابید.

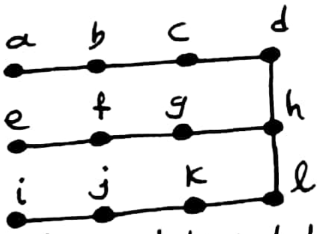
الف)



$$\xrightarrow[\Delta(G)=3]{n=5}$$

* همان طور که ملاحظه می‌شود در این گراف عدد احاطه‌گری با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر است.

ب)



$$\xrightarrow[\Delta(G)=3]{n=12}$$

Δ توجه کنید که با ۳ رأس نمی‌توان تمام رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا برای احاطه شدن ۱۲ رأس این گراف، باید هر کدام از این ۳ رأس، حداقل ۴ رأس را احاطه نمایند. پس باید حداقل ۳ رأس با درجهٔ ۴ وجود داشته باشد، که این گراف این گونه نیست.

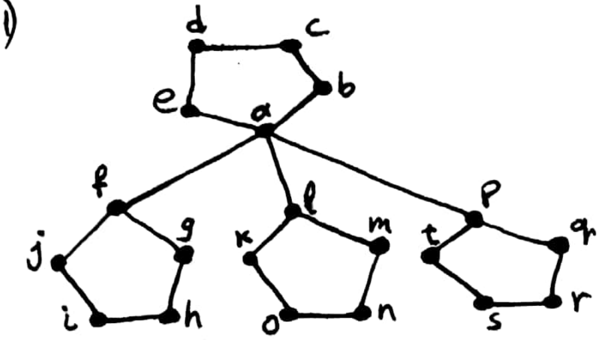
* همان طور که ملاحظه می‌شود، در این گراف عدد احاطه‌گری با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر نیست.

حالت خاص Ex: در گراف k منتظم، با n رأس، همواره داریم: $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n-k$

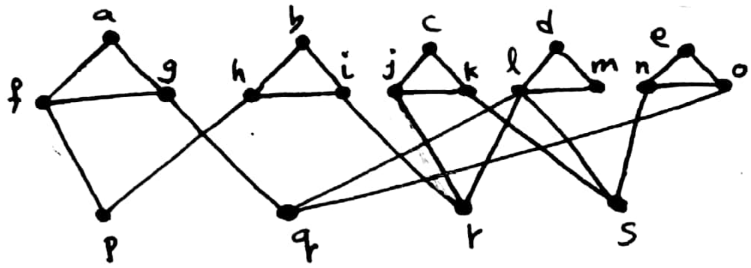
زیرا

مثال: Ex عدد احاطه گری هر یک از گراف‌های زیر را بیابید.

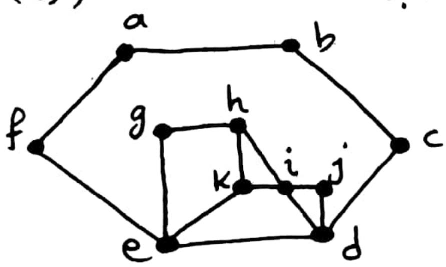
الف)



ب)



تست H.W عدد احاطه گری گراف مقابل، با عدد احاطه گری کدام گراف برابر است؟ (گزینه ۴)



۱) $\bar{K}_4$ ۲) P_{10}

۳) P_8 ۴) C_6

تست H.W عدد احاطه گری گراف $\bar{C}_n$ کدام است؟ $(n \geq 4)$ (گزینه ۲)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ۴) $n-2$

باید زمان بدهی تا بگذرد، آنقدر بگذرد که وقتی حماقت‌هایت جلو چشمت آمد، از ته دل بخندی. هر وقت حس کردی که دیگر چیزی نمانده که ناراحتت کند و آنقدر شجاع شده‌ای که وقتی بحثش پیش بیاید، موضوع را عوض نکنی و رنگت نپرد آنجا دقیقاً همان موقعی است که همه چیز تمام شده و به زندگی عادی برگشته‌ای.