



۳۸- فرض کنید در دامنه  $[0, +\infty)$  تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$  مفروض باشد،  $f^{-1}(2)$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

$$\frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2 \Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4$$

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$t = 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2 (2 \pm \sqrt{3}) \rightarrow x = \log_2 (2 + \sqrt{3})$$

- (۱)  $\log_2^{2-\sqrt{3}}$
- (۲)  $\log_2^{\sqrt{3}-1}$
- (۳)  $\log_2^{1+\sqrt{3}}$
- (۴)  $\log_2^{2+\sqrt{3}}$

**یافتن محل برخورد نمودار تابع وارون با تابعی دلخواه:**

در این تیپ تست ها از خاصیت جا به جایی تابع وارون در طرفین مساوی استفاده می کنیم. به این ترتیب که اگر تابعی از یک طرف مساوی به طرف دیگر برود اینورس می گیرید یا اگر دارد آن را پس می دهد. دقت کنید عملیات بالا را فقط زمانی می توانیم انجام دهیم که تابع کاملاً تنها باشد و نه چیزی جمع و تفریق شده باشد و نه ضربی داشته باشد.

$f^{-1}(x) = y \rightarrow x = f(y)$  یعنی  $f(x) = y \rightarrow x = f^{-1}(y)$

اگر آرگومان و یا  $y$  یک گارتم کهدو بن صفر ویک یا کهدو بزرگ تر از یک باشند، حاصل یک گارتم نسبت و حرکت که جبر این باشد حاصل یک گارتم منفی نسبت.

۳۹- اگر  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f^{-1}, g(x) = \frac{x-9}{2}$  با کدام طول

مقاطع هستند؟ (تجربی ۹۸)

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-9}{2} \Rightarrow x = f\left(\frac{x-9}{2}\right)$$

۱۵ (۲)

گزینه ۱:  $12 = f\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow 12 = \frac{9}{4} - 3 - 3 \quad X$

۱۸ (۳)

گزینه ۲:  $15 = f(3) \rightarrow 15 = 9 - 6 - 3 \quad X$

۲۱ (۴)

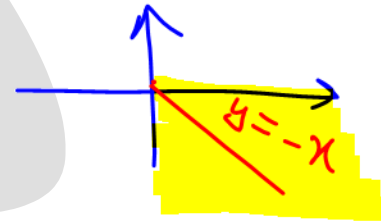
گزینه ۳:  $11 = f\left(\frac{9}{2}\right) \rightarrow 11 = \frac{81}{4} - 9 - 3 \quad X$

گزینه ۴:  $21 = f(6) \rightarrow 21 = 36 - 12 - 3 \quad \checkmark$

۴۰- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  در دامنه  $D_f = (-\infty, 0)$  را در نظر بگیرید. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز

ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می کند؟ (تجربی ۹۹)

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow x = f(-x)$$



$\frac{3}{4}$  (۱)

۱ (۲)

$$x = (-x) - \frac{2}{(-x)} \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{1}{x}$$

$\frac{3}{2}$  (۳)

۲ (۴)

$$\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

۴۱- اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{x+2}$  باشد، نمودار تابع  $g(x) = -f^{-1}(x+1)$  نیمساز ربع دوم را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$-x = g(x) \rightarrow -x = -f^{-1}(x+1) \rightarrow f^{-1}(x+1) = x \quad \frac{3-\sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

$$x+1 = f(x) \rightarrow x+1 = 2x + \sqrt{x+2} \rightarrow -x+1 = \sqrt{x+2} \quad (2)$$

$$\frac{\text{نه توان}}{\text{و}} \rightarrow x^2+1-2x = x+2 \rightarrow x^2-3x-1=0 \quad \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad (3)$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \quad \frac{-2-\sqrt{7}}{2} \quad (4)$$

**نکته:** برای وارون کردن تابع مرکب از فرمول زیر هم می توان استفاده کرد.

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

۴۲- اگر  $f(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$  و  $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$  باشند. ضابطه  $f^{-1} \circ g^{-1}(x)$  کدام است؟

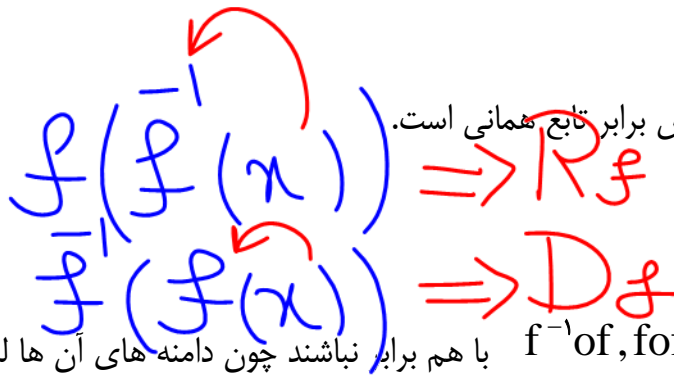
$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (x)^{-1} = x \quad (1)$$

$$g \circ f(x) = \frac{-2 + \frac{1}{x-1} + 3}{-2 + \frac{1}{x-1} + 2} = \frac{\frac{1}{x-1} + 1}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\cancel{x-1} \frac{x-1}{x-1} + 1}{\cancel{x-1} \frac{x+1}{x-1}} = x \quad (2)$$

ترکیب  $f^{-1}, f$  :

ترکیب تابع با تابع وارونش برابر تابع همانی است.

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

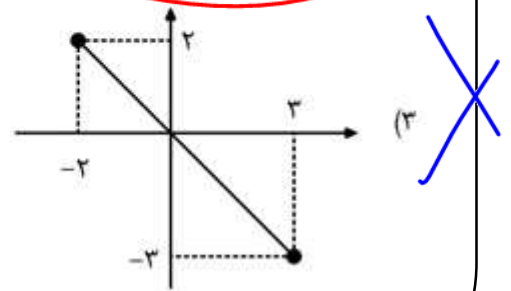
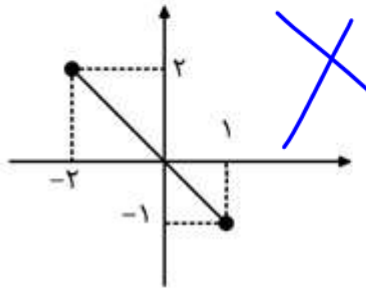
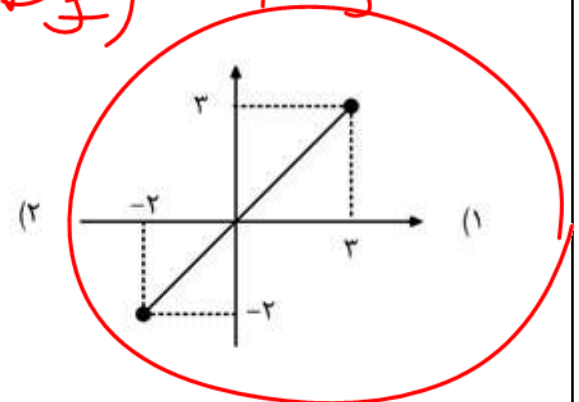
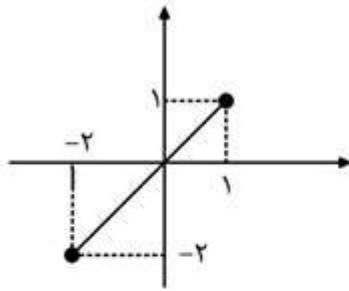
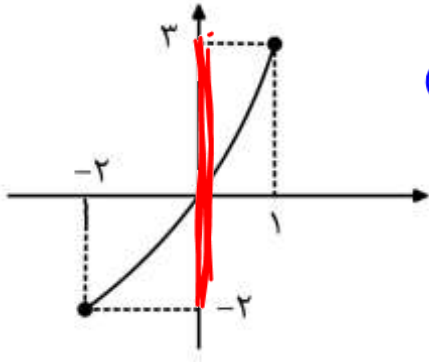
ممکن است دو تابع  $f^{-1} \circ f, f \circ f^{-1}$  با هم برابر نباشند چون دامنه های آن ها لزوماً با هم برابر نیستند.نکته: دامنه تابع  $f \circ f^{-1}$  برد تابع  $f$  و دامنه تابع  $f^{-1} \circ f$  دامنه تابع  $f$  است. 

$$D_{f \circ f^{-1}} = R_f,$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

۴۳- نمودار تابع  $f^{-1}$  به صورت زیر است. نمودار تابع  $y = f^{-1} \circ f(x)$  کدام است؟

$y = x \quad (x \in D_f) = R_{f^{-1}}$



۴۴- اگر  $f(x) = 5 + 2\sqrt{8-x}$  و دامنه تابع ثابت  $(f \circ f^{-1})_{(x)} - (f^{-1} \circ f)_{(x)}$  کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

اشتراک دو دامنه = دامنه کل

(۱)  $(-\infty, 8]$

$D_{f \circ f^{-1}(x)} = D_{f^{-1}} = R_f \rightarrow y \geq 5$

(۲)  $[5, +\infty)$

$2\sqrt{8-x} \geq 0 \rightarrow 5 + 2\sqrt{8-x} \geq 5$

(۳)  $[5, 8]$

$D_{f^{-1} \circ f(x)} = D_f = 8-x \geq 0 \rightarrow x \leq 8$

(۴)  $(-\infty, 5]$

$x \leq 8 \cap y \geq 5 = [5, 8]$